MATEMATIK | **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

Datum: 130826 kl. 08.30–12.30

Telefonvakt: Christoffer Standar

0703-088304

MVE275 Linjär algebra AT

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida 26/8 eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm determinanterna av var och en av matriserna A^{-1}, B och $A^{-1}B$.

(b) Ge exempel på värden för a och b som medför att systemet $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ har unik, ingen, respektive oändligt många lösningar. (3p)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Definiera vad som menas med att en $n \times n$ matris A är *inverterbar*, samt med *inversen* till en sådan matris. (1p)

(b) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen

$$AXB = XB + C. \qquad (1)$$

(c) Låt nu i stället $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sådan att $(a-1)(d-1) = bc$. Förklara varför ekvation (1) ovan inte kan ha en unik lösning i detta fall. (2p)

Var god vänd!

4. Betrakta följande tre vektorer i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}4 & 6 & 1\end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}5 & a & -11\end{bmatrix}^T.$$

(a) För vilket $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linjärt beroende ? För detta a skriv även $\mathbf{v}_3$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. (3p)

(b) Bestäm en ON-bas $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ för planet som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Ange även koordinatvektorerna för $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ med avseende på $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. (3p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet. (6p)

(a) Om A är en 3×3 matris med egenvärdena $1, 2$ och 3, då finns det en ortogonalmatris P sådan att $P^T AP$ är en diagonalmatris.

(b) Mängden V av alla vektorer $\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$ där x, y, z är heltal är ett underrum i $\mathbb{R}^3$.

(c) Om A och B är $n \times n$ matriser med B inverterbar sådan att $AB = BA$, då måste även $AB^{-1} = B^{-1}A$ gälla.

6. (a) Visa att de tre polynomen $p_1(t) = 1 + t^2$, $p_2(t) = 2 + t - t^2$, $p_3(t) = t + t^2$ bildar en bas för rummet av alla polynom av grad högst 2 ($\mathbb{P}_2$). Ange också koordinaterna för polynomet $1 + t + t^2$ i basen $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$. (6p)

(b) Låt $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ vara den linjära avbildning som ges av derivering, dvs $T[p(t)] = p'(t)$. Bestäm matrisen för T med avseende på basen $\mathcal{B}$ för $\mathbb{P}_2$ ovan och standardbasen $\mathcal{E} = \{1, t\}$ för $\mathbb{P}_1$.

7. (a) Definiera vad som menas med att en $n \times n$ matris P är en *ortogonalmatris*. (6p)

(b) Låt R vara matrisen för en 45-graders rotation kring axeln genom origo och punkten $(1, 2, 3)$ i $\mathbb{R}^3$. Ange matrisen för R på formen $R = PMP^T$, där P är en ortogonalmatris.

(OBS! Det räcker att ange P och M, du behöver inte räkna ut R).

(c) Vad är R^{48} ? Förklara ditt resonemang.

Lycka till!
Tommy Gustafsson

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 130826	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) En 2×2 matris A har egenvärdena -1 och 2 samt tillhörande egenvektorer $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ respektive $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$. Bestäm A. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Bestäm en bas för nollrummet till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1$, där $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ är standardbasvektorerna i $\mathbb{R}^2$. Bestäm matrisen för T i standardbas. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Bestäm den linje $y = kx + m$ som i minstakvadratmetodens mening är bäst anpassad till punkterna (3p)

$$(-1, 2), \quad (0, 3), \quad (2, 4), \quad (3, 5).$$

Lösning:

....

(f) Bestäm egenvärden och egenvektorer för matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

Lösningar MVE275, Linjär Algebra AT, 130826

1. (a) Eftersom det finns två egenpar (egenvektor + egenvärde) till A så är A diagonaliserbar och vi kan skriva $A = PDP^{-1}$ med

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi måste finna

$$P^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Så

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 18 \\ -6 & 11 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi benämner den givna matrisen A och söker X så att $AX = I$. Ställ upp den utökade koefficientmatrisen

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Då man (t.ex.) utför radoperationerna

$$R_1 \leftrightarrow R_3, \ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, \ R_3 \mapsto R_3 - R_2, \ R_1 \mapsto R_1 + R_3, \ R_3 \mapsto -\frac{1}{2}R_3, \ R_2 \mapsto R_2 + R_3$$

erhålls den radekvivalenta matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det gäller alltså att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi ska hitta en bas för det underrum till $\mathbb{R}^4$ som består av alla $\mathbf{x}$ sådana att $A\mathbf{x} = 0$ där A är matrisen i uppgiften. Det gör vi genom att först hitta den radekvivalenta reducerade trappstegsformen till A. Detta kan göras genom att applicera följande sekvens av radoperationer på A:

$$R_3 \mapsto R_3 - R_1, \ R_4 \mapsto R_4 - R_2, \ R_3 \mapsto R_3 - R_2, \ R_1 \mapsto R_1 + R_2.$$

Detta ger att

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att x_3 och x_4 är fria variabler och att $x1 = -2x_3 - x_4$ och $x_2 = -x_3 - 2x_4$ varvid det följer att varje vektor $\mathbf{x}$ i nollrummet kan skrivas på formen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2x_3 - x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mängden

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

utgör således en bas för nollrummet till A.

(d) Vi söker T:s standardmatris $A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix}$. Det gäller att $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ och $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$. Linjariteten hos T ger således att

$$T(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$T(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \frac{1}{2}T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Därför ges T:s standardmatris A av

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi måste hitta minsta-kvadratlösningen till problemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

(Här tolkar vi alltså x_1 som k i modellen och x_2 som m, om vi byter plats på kolonnerna i A så blir tolkningen den omvända.) Vi måste lösa normalekvationerna

$$A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Det gäller att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Således ges normalekvationernas utökade koefficientmatris av

$$\begin{bmatrix} 14 & 4 & 21 \\ 4 & 14 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 1 & 14/5 \end{bmatrix}$$

så den sökta linjen utgörs av lösningarna till $y = \frac{7}{10}x + \frac{14}{5}$.

(f) Vi börjar med att hitta egenvärdena, d.v.s. alla $\lambda \in \mathbb{R}$ sådana att det finns nollskilda vektorer $\mathbf{x}$ så att $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ vilket är ekvivalent med att $(A - \lambda I)\mathbf{x}$. Vi vet att detta bara gäller om $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi har att

$$\det(A-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & -4\\ -2 & -1-\lambda\end{bmatrix}\right) = (\lambda-3)(\lambda+3),$$

så vi har två distinkta egenvärden, 3 och -3. Vi behöver nu hitta icke-triviala lösningar till ekvationerna $(A-3I)\mathbf{x} = 0$ och $(A+3I)\mathbf{x} = 0$. Således räknar vi

$$A - 3I = \begin{bmatrix}-2 & -4\\ -2 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

så en egenvektor till egenvärdet 3 är $(-2, 1)$. För egenvärdet -3 får vi

$$A + 3I = \begin{bmatrix}4 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Härav följer att vektorn $(1, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet -3.

2. (a) Vi vet att $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Det följer att $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. Determinaten hos en diagonal matris är produkten av diagonalen så $\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. För att finna $\det(A)$ kan vi (i det här fallet) kanske tillåta oss kofaktorexpansion. Vi använder dock det faktum att radersättningar inte förändrar determinanten medan radbyten ändrar determinantens tecken och räknar

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\right)\\ &= -\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 5 & 3\end{bmatrix}\right) = -\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\right) = -2.\end{aligned}$$

Således är $\det(A^{-1}) = -1/2$, $\det(B) = 24$ och $\det(A^{-1}B) = -\frac{1}{2} \cdot 24 = -12$.

(b) Vi skriver upp systemets totalmatris och radreducerar till trappstegsform ($R_2 \mapsto -(R_2 - 2R_1)$, $R_3 \mapsto R_3 - R_1$, $R_3 \mapsto R_3 + 2R_2$) och får

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & b\\ 1 & -1 & a & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -5 & 2-b\\ 0 & 0 & a-9 & 3-2b\end{bmatrix}$$

Vi ser att om $a \neq 9$ så existerar en unik lösning för varje värde på b. Om $a = 9$ så finns det oändligt många lösningar om $b = 3/2$, annars är systemet inkonsistent.

3. (a) Se boken.

(b) Addera $-XB$ till de båda leden i ekvationen och vi erhåller

$$AXB = XB + C \Leftrightarrow AXB - XB = C \Leftrightarrow (A - I)XB = C. \tag{2}$$

Det är lätt att inse att såväl matrisen $A - I$ som matrisen B är inverterbara och eftersom de är så små kan vi tillåta oss att räkna ut dessa inverser. Algebraiskt gäller det att lösningen ges av

$$X = (A - I)^{-1}CB^{-1}. \tag{3}$$

Vi har att

$$(A - I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

så om vi sätter in dessa och den givna matrisen C i (**??**) så får vi att

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(Notera att för större matriser så bör man definiera en ny okänd matris $Y = XB$ och substituera i (**??**) och Gauss-elliminera motsvarande totalmatris $\begin{bmatrix} (A - I) & C \end{bmatrix}$. Då finner man alltså Y och kan sedan lösa $XB = Y$ genom att lösa $B^T X^T = Y^T$ medelst Gauss-eliminering av $\begin{bmatrix} B^T & Y^T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I & X^T \end{bmatrix}$. Dessa räkningar kan man naturligtvis också genomföra i det aktuella fallet.)

(c) Om

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

så är $\det(A - I) = (a - 1)(d - 1) - cb$. Att $(a - 1)(d - 1) = cb$ är alltså liktydigt med att $\det(A - I) = 0$ och då ger satsen om matrisers invertebarhet att den givna ekvationen ej kan ha en entydig lösning så fort man insett att ekvivalensen i (**??**) gäller.

4. (a) För att vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ skall vara linjärt beroende måste det finnas skalärer r, s och t, där någon är nollskild, så att $r\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3 = 0$. Vi behöver alltså avgöra för vilka värden på a som detta homogena system har icke-triviala lösningar. Följande sekvens av radoperationer:

$$R_2 \mapsto R_2 - R_1,\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_1,\ R_3 \mapsto -\frac{1}{7}R_3,\ R_3 \leftrightarrow R_2,\ R_3 \mapsto R_3 - 2R_2$$

ger att

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a - 11 \end{bmatrix}.$$

Om $a = 11$ så ser vi att den sista kolonnen ej är en pivotkolonn, vilket är liktydigt med att den homogena ekvationen har icketriviala lösningar, vilket i vårt fall innebär att de tre vektorerna är linjärt beroende.

För att, med $a = 11$, kunna skriva $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 11 & -11 \end{bmatrix}^T$ som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ så måste vi alltså hitta x_1 och x_2 så att $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$. Men de redan genomförda räkningarna kan tolkas som framåtfasen i lösningsprocessen av detta system och vi kan avsluta med radoperationen $R_1 \mapsto R_1 - 4R_2$, d.v.s.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har alltså att $\mathbf{v}_3 = -7\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$.

(b) Vi har att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 12$ så de båda vektorerna är ickeparallella och deras linjära hölje är alltså ett plan. För att hitta en ON-bas för detta så använder vi Gram-Schmidts process. Vi normaliserar $\mathbf{v}_1$ och väljer den resulterade vektorn om vår första basvektor, $\mathbf{u}_1$. Därefter räknar vi ut det ortogonala komplementet av $\mathbf{v}_2$:s projektion på $\mathbf{u}_1$ och normaliserar den erhållna vektorn. Resultatet är vår sökta vektor $\mathbf{u}_2$. Alltså,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

och slutligen

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{29}}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

en ON-bas för

$$\mathrm{span}\left(\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\right).$$

Koordinatvektorerna för $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ med avseende på $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är då $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{29}} & \frac{1}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}$.

5. (a) Falskt. Om $P^TAP = D$ så är $A = PDP^T$ vilket innebär att A är symmetrisk ($A^T = A$). Så om A är en triangulär matris med diagonal $1,\ 2,\ 3$ och något nollskilt element utanför diagonalen så är påståededet inte sant.

(b) Falskt ty $1/2 * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ligger ej i V.

(c) Sant. Om A och B är $n \times n$ matriser med B inverterbar gäller:

$$AB = BA \iff A = BAB^{-1} \iff B^{-1}A = AB^{-1}$$

6. (a) Vi ställer upp utökad koefficientmatris:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{-R_1+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{3R_2+R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

varur bakåtsubstitution ger oss kooordinatvektorn $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^T$ i basen $\mathcal{B}$. Vi ser också att koefficientmatrisen har full rang så $\{p_1, p_2, p_3\}$ är linjärt oberoende och alltså bas för $\mathbb{P}_2$.

(b) Matrisen för T består av basvektorernas bilder i kolonnerna. Vi har $T[p_1] = 2t$, $T[p_2] = 1 - 2t$ och $T[p_3] = 1 + 2t$, vilket ger matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

7. (a) Se kurslitt.

(b) Välj en vektor, ortogonal mot $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, till exempel $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Välj sedan en vektor, ortogonal mot både $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, till exempel genom att radreducera

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

vilket till exempel ger lösningen $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.

Låt $\mathbf{u} = 1/\sqrt{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{w} = 1/\sqrt{14}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{v} = 1/\sqrt{70}\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}^T$. Då bildar $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en ON-bas.

I denna bas ges en vridning 45 grader av

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (1/\sqrt{2} = \cos(45^\circ) = \sin(45^\circ))$$

där kolonnerna är basvektorernas positioner efter rotationen.

Rotationen R ges i standardbasen av

$$\mathbf{x} \mapsto P^{-1}\mathbf{x} \mapsto MP^{-1}\mathbf{x} \mapsto PMP^{-1}\mathbf{x} = R\mathbf{x},$$

dvs $R = PMP^{-1} = PMP^T$, där $P = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$ är en ortogonalmatris.

(c) $R^{48} = PM^{48}P^T = P(M^8)^6P^T = PI^6P^T = PP^T = I$, ty P är ortogonal. Man kan också se det geometriskt; R^8 roterar ett helt varv ($45^\circ = 1/8$-varv), dvs $R^8 = I$ och därmed också $R^{48} = I$ ty 6 varv.