MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa
Datum: 150103 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Gustav Kettil
0703-088304

MVE275 Linjär algebra AT

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Definiera vad som menas med nollrummet till en $m \times n$-matris. (1p)

(b) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

och låt $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3, 2, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -2, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 1)$, Bestäm vilken eller vilka av dessa vektorer som tillhör $\mathrm{Col}(A)$ respektive $\mathrm{Nul}(A)$. (2p)

(c) Bestäm en bas för $\mathrm{Col}(A)$ och $\mathrm{Nul}(A)$. (3p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -9 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till A. (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till A. (2p)

(c) Är A diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera A. (2p)

4. Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$, och $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 0)$.

(a) Bestäm en ortonormerad bas för $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. (2p)

(b) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. (2p)

(c) Bestäm avståndet från $\mathbf{u}$ på $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

(a) Vad är det största vertikala avståndet från någon av punkterna $(-2,-1)$, $(-1,-1)$, $(0,1)$, $(1,-2)$, och $(2,-2)$ till den andragradskurva som är bäst anpassad till punkterna enligt minsta kvadratmetoden? (5p)

(b) Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

i. Om A och B är $n \times n$-matriser, så är $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (2p)

ii. Om A är en 2×2-matris och $\det(A) = 0$, så är en av A:s kolonner en multipel av den andra. (2p)

iii. Rangen av en matris är detsamma som antalet rader som inte bara innehåller nollor. (2p)

(c) i. Definiera vad som menas med att vektorerna $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}$ är linjärt oberoende. (2p)

ii. Definiera vad som menas med $Span(\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n})$. (2p)

iii. Bevisa att om mängden $\{\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_n}\}$ innehåller nollvektorn, så är mängden linjärt beroende. (3p)

Lycka till!
Elin Götmark

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 150103	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) En 2×2 matris A har egenvärdena -1 och 2 samt tillhörande egenvektorer $(2, 1)$ respektive $(3, 2)$. Bestäm A. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna inversen till matrisen (2p)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

För vilka högerled $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik, inga, respektive oändligt många lösningar?

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning sådan att $T(\mathbf{e}_1) = (1, -2)$ och $T(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = (0, 1)$. (3p)
Bestäm matrisen för T i standardbasen.
Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lös matrisekvationen $2A + XB = X$.
Lösning:

Svar: ....

(f) Bestäm arean av parallellogrammet som spänns upp av vektorerna $(3, 1)$ och $(2, 2)$. (2p)
Lösning:

Svar: ....