MVE275 Linjär algebra AT

Lösningar

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Om man låter $A = \begin{bmatrix}\mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\end{bmatrix}$, så är $W = \operatorname{Col} A$. Radreducerar man får man att

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & 10 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Vi ser då att första och tredje kolonnen är pivotkolonner till A, så $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_3$ bildar en bas för $\operatorname{Col} A$, och därmed också för W.

Svar: $\mathbf{w}_1$ och $\mathbf{w}_3$ bildar en bas för W.

(b) Vi räknar ut A^{-1} genom att radreducera $\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix}$ till $\begin{bmatrix}I & C\end{bmatrix}$, och då är $C = A^{-1}$.

$$\begin{bmatrix}A & I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Svar:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ -4 & 1 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

(c) Vi får från lineariteten av T att

$$T(\mathbf{e}_3) = -T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) + T(\mathbf{e}_1) = -(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3.$$

Använder vi linearitet igen får vi då att

$$T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_3 - (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

Svar: $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$.

(d) För att skriva $\mathbf{v}$ som en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ vill vi lösa ekvationssystemet $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$. Motsvarande totalmatris blir

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & -4 & -5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

så $x_1 = -3$ och $x_2 = 2$.

Svar: $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$.

(e)

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \{ \text{ utveckling längs första raden eller kolonnen } \} =$$

$$=(-2)\begin{vmatrix} -5 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \{ \text{ utveckling längs andra kolonnen } \} = (-2)\cdot 3 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=(-2)\cdot 3 \cdot ((-5)\cdot 2 - (-1)\cdot 7) = 18.$$

SVAR: $\det(A) = 18$.

(f) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då är $AB = 0$.

SVAR: Matriserna A och B ovan uppfyller $AB = 0$ (men det finns många andra möjliga svar).

2. (a) Vi skriver upp totalmatrisen för ekvationen $A\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -10 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & -10 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 13 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att tredje och fjärde kolonnerna i A inte är pivotkolonner, och svarar alltså mot fria variabler, s och t, och vi får då allmänna lösningen:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2x_4 = -s + 2t \\ x_2 = -2x_3 - 3x_4 = -2s - 3t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = 0 \end{cases}.$$

SVAR:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s+2t \\ -2s-3t \\ s \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Från (a), ser man att kolonn 1, 2 och 5 i A är pivotkolonner, så $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_5$ är en bas för $\operatorname{Col} A$. Alltså är $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A = 3$.

Eftersom $\operatorname{Col} A$ är ett 3-dimensionellt underrum till $\mathbb{R}^3$, så är $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^3$, så vilken bas som helst för $\mathbb{R}^3$ är en bas för $\operatorname{Col} A$, så man skulle också kunna ta t.ex. standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

Svar: Vektorerna

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(eller godtycklig mängd av tre stycken linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$) är en bas för $\operatorname{Col} A$ och $\operatorname{rank} A = 3$.

3. (a) Egenrummet för $\lambda = 2$ ges av $\operatorname{Nul}(A - 2I)$.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så x_2 och x_3 blir fria variabler (som vi låter vara $2s$ och t) i ekvationssystemet $(A - 2I)\mathbf{x} = 0$, och vi får allmänna lösningen

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Då blir $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ två stycken linjärt oberoende egenvektorer till A med egenvärde 2 (eftersom de bildar en bas för $\operatorname{Nul}(A - 2I)$).

Egenrummet för $\lambda = 9$ ges av $\operatorname{Nul}(A - 9I)$.

$$A - 9I = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -19 & 19 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ är en bas för egenrummet för $\lambda = 9$.

Eftersom v_1 och v_2 är linjärt oberoende egenvektorer med egenvärde 2 och v_3 egenvektor med egenvärde 9, så är $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ linjärt oberoende, och därför en bas för $\mathbb{R}^3$.

Svar:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas för $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer till A.

(b) Eftersom v_1, v_2 är egenvektorer till A med egenvärde 2 och v_3 egenvektor med egenvärde 9, så är allmänna lösningen till det linjära ekvationssystemet

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{2t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{2t}\mathbf{v_2} + c_3 e^{9t}\mathbf{v}_3.$$

För att den skall uppfylla $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t$, skall vi då välja c_1, c_2, c_3 så att $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t$, vilket om man sätter upp motsvarande ekvationssystem ser har lösningen $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$.

SVAR:

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{9t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Vi tar fram en ortogonalbas för W med hjälp av Gram-Schmidt processen: Först låter vi

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I nästa steg låter vi

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{-9}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Och slutligen låter vi

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{-9}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{12}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

SVAR:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

bildar en ortogonalbas för W.

(b) Ortogonalprojektionen $\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\perp}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\perp}$ ger en uppdelning $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ sådan att $\mathbf{y} \in W$ och $\mathbf{z} \in W^{\perp}$. Eftersom $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ är en ortogonalbas så ges ortogonalprojektionen av

$$\begin{aligned}\mathbf{y} = \mathbf{x}^{\perp} &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 = \\ &= \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{12}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

och då blir

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

SVAR:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

Del 2: Överbetygsdelen

5. (a) Vi får att matrisen M för D relativt standardbaserna (som vi betecknar $\mathcal{E}_2$ och $\mathcal{E}_3$) blir

$$\begin{aligned}M &= \begin{bmatrix} (D(1))_{\mathcal{E}_2} & (D(x))_{\mathcal{E}_2} & (D(x^2))_{\mathcal{E}_2} & (D(x^3))_{\mathcal{E}_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0)_{\mathcal{E}_2} & (1)_{\mathcal{E}_2} & (2x)_{\mathcal{E}_2} & (3x^2))_{\mathcal{E}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

och matrisen N för I relativt standardbaserna $\mathcal{E}_2$ och $\mathcal{E}_3$ blir

$$\begin{aligned}N &= \begin{bmatrix} (I(1))_{\mathcal{E}_3} & (I(x))_{\mathcal{E}_3} & (I(x^2))_{\mathcal{E}_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x)_{\mathcal{E}_3} & (x^2/2)_{\mathcal{E}_3} & (x^3/3)_{\mathcal{E}_3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

SVAR: Matriserna M och N för D respektive I relativt standardbaserna är:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi får om vi räknar i koordinater i basen $\mathcal{E}_3$ så får vi att:

$$(I(D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3))_{\mathcal{E}_3} = N(D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3))_{\mathcal{E}_2} =$$

$$= NM(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)_{\mathcal{E}_3} = NM \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Eftersom koordinatvektorn $\begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^t$ i basen $\mathcal{E}_3$ svarar mot polynomet $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ ser vi då att

$$I(D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

På liknande sätt får man att

$$(D(I(a_0 + a_1x + a_2x^2)))_{\mathcal{E}_2} = MN \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

så

$$D(I(a_0 + a_1x + a_2x^2)) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

(c) Vi får att matrisen för D relativt $\mathcal{B}_3$ och $\mathcal{B}_2$ blir

$$\begin{bmatrix} (D(1))_{\mathcal{B}_2} & (D(2t-1))_{\mathcal{B}_2} & (D(t^2-2t))_{\mathcal{B}_2} & (D(t^3-3t^2)_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} (0)_{\mathcal{B}_2} & (2)_{\mathcal{B}_2} & (2t-2)_{\mathcal{B}_2} & (3t^2-6t)_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} (0)_{\mathcal{B}_2} & (2\cdot 1)_{\mathcal{B}_2} & ((-1)\cdot 1 + (2t-1))_{\mathcal{B}_2} & (3t^2-6t)_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Svar: Matrisen blir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. (a) Om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är två olika lösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så är $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ en icke-trivial lösning till $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, så enligt satsen om inverterbara matriser (villkor d)) är A inte inverterbar. Då får vi igen av satsen om inverterbara matriser (villkor h) att kolonnerna i A inte spänner upp $\mathbb{R}^n$.

(b) Enligt satsen om inverterbara matriser (villkor k), så är E inverterbar, och multiplicerar vi då ekvationen $EF = I_n$ med E^{-1} från vänster så får vi att $F = E^{-1}$. Enligt definition av invers så är $EE^{-1} = I = E^{-1}E$, så får vi att $EF = EE^{-1} = E^{-1}E = FE$.

7. (a) Om A är en $n \times m$ matris, och Nul A är ett delrum till $\mathbb{R}^k$, så är $k = n$. För definition av nollrum, och bevis för att det är ett delrum av $\mathbb{R}^n$, se Lay, avsnitt 2.8.

(b) Se Lay, avsnitt 4.6.