MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 131019 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Richard Lärkäng
0703-088304

MVE275 Linjär algebra AT

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen) Bonuspoäng från duggor 2013 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida 19/10 eftermiddag. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & -10 & 3 \\ 5 & 4 & 13 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm allmänna lösningen till ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (3p)

(b) Bestäm en bas för $\operatorname{Col} A$, och ange $\operatorname{rank} A$. (3p)

3. Låt A vara matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Egenvärdena till A är 2 och 9. Bestäm tre linjärt oberoende egenvektorer till A. (4p)

(b) Bestäm lösningen till systemet av differentialekvationer (3p)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) - x_2(t) + 6x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 6x_3(t) \\ x_3'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + 8x_3(t). \end{cases}$$

som uppfyller att $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^t$.

Var god vänd!

4. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^t$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1 & -5 & 2 & -3\end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-1 & -4 & 3 & -4\end{bmatrix}^t$.

(a) Bestäm en ortogonalbas för W. (3p)

(b) Skriv vektorn $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^t$ som en summa av vektorer $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ där $\mathbf{y}$ ligger i W och $\mathbf{z}$ ligger i $W^{\perp}$. (3p)

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt $\mathbb{P}_2$ och $\mathbb{P}_3$ vara vektorrummen av polynom av grad högst 2 respektive 3, och låt D och I vara de linjära avbildningarna $D : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ och $I : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ definierade av (2p)

$$D(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_1+2a_2x+3a_3x^2 \text{ och } I(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3$$

(så att D är derivering och I är integrering från 0 till x). Bestäm matriserna för avbildningarna D och I relativt standardbaserna $\{1, x, x^2\}$ och $\{1, x, x^2, x^3\}$ för $\mathbb{P}_2$ respektive $\mathbb{P}_3$.

(b) Förklara med hjälp av matriserna från (a) att (2p)

$$I(D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

och att

$$D(I(a_0 + a_1x + a_2x^2)) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

(Det som efterfrågas är alltså hur man ser detta från matriserna för D och I, inte uträkningar som visar att formlerna gäller).

(c) Låt $\mathcal{B}_2$ vara basen $\{1, 2t-1, t^2-2t\}$ för $\mathbb{P}_2$ och $\mathcal{B}_3$ vara basen $\{1, 2t-1, t^2-2t, t^3-3t^2\}$ för $\mathbb{P}_3$. Bestäm matrisen för D relativt baserna $\mathcal{B}_3$ och $\mathcal{B}_2$. (2p)

6. (a) Om A är en $n \times n$ matris och ekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mer än en lösning för något $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$, kan då kolonnerna i A spänna upp $\mathbb{R}^n$? Förklara varför, eller varför inte? (3p)

(b) Antag att E och F är två $n \times n$ matriser sådana att $EF = I_n$. Förklara varför $FE = EF$. (3p)

7. (a) Definiera *nollrummet*, $\operatorname{Nul} A$, till en matris A. Antag att A är en $m \times n$ matris. Vad skall k vara för att $\operatorname{Nul} A$ skall vara ett underrum till $\mathbb{R}^k$? Bevisa att för det valet av k, så är $\operatorname{Nul} A$ ett underrum till $\mathbb{R}^k$. (3p)

(b) Formulera och bevisa *Rang-satsen.* (3p)

Lycka till!
Richard Lärkäng

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 131019	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm en bas för $W = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, där $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 5\end{bmatrix}^t$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}2 & 0 & 10\end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 5\end{bmatrix}^t$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna inversen till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning så att (3p)

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3,\ T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_3 \text{ och } T(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3,$$

där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ är standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Bestäm $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$.

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Skriv vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3 & -5\end{bmatrix}^t$ som en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^t$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}3 & -4\end{bmatrix}^t$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Beräkna determinanten, det(A), där (2p)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lösning:

....

(f) Ge exempel på matriser A och B sådana att $AB = 0$, men $A \neq 0$ och $B \neq 0$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Liten ordlista över linjär algebra. Se också Glossary i kursboken där kortfattad förklaring av termerna ges.

Engelskt ord	**Svenskt ord**
adjoint, adjugate	adjunkt, adjungerad matris
algorithm	algoritm, räkneschema
angle	vinkel
augmented matrix	totalmatris, utvidgad matris
auxiliary (equation)	hjälp(ekvation), ibl. karakteristisk ekvation
backward (phase)	bakåt (fas)
basic variable	bunden (ofri) variabel, basvariabel,
basis	bas
belongs to	tillhör
change of basis	basbyte
collinear (vectors)	parallella (vektorer)
column	kolonn
column space	kolonnrum
composition of linear transformations	sammansatt linjär avbildning
condition	villkor
condition number	konditionstal
consistent system	lösbart system
constraint	restriktion, villkor
dimension	dimension
distinct	distinkta, olika
domain	definitionsmängd
dot product	skalärprodukt
echelon (matrix)	trappstegs(matris)
eigenvalue, eigenvector	egenvärde, egenvektor
equivalent	ekvivalent, likvärdig
finite (dimensional)	ändligt (dimensionell)
forward (phase)	framåt (fas)
general solution	allmän lösning
homogeneous equation	homogen ekvation
identity matrix	enhets matris, identitets matris
if and only if	om och endast om
image	bild
inconsistent (system)	olösbart (system)
inner product	skalärprodukt
inverse, invertible	invers, inverterbar
kernel	kärna, nollrum
least-square (method)	minsta-kvadrat(-metoden)

linear combination	linjär kombination
linearly (in)dependent	linjärt (o)beroende
linear span	linjärt hölje
lower triangular	undre triangulär
mapping	avbildning, transformation
necessary (condition)	nödvändigt (villkor)
nonsingular (matrix)	inverterbar (matris), icke-singulär
nontrivial (solution)	icke-trivial (lösning)
null space	nollrum
one-to-one	injektiv (ev. en-entydig)
onto	surjektiv, på
orthonormal	ortonormerad
overdetermined system	överbestämt system
range	värdemängd
rank	rang
reduced echelon matrix	radkanonisk matris, reducerad trappstegsmatris
row space	radrum
satisfy	satisfiera, uppfylla
set	mängd
singular	icke-inverterbar, singulär
solution	lösning
solution set	lösningsmängd
span, linear span	(linjärt) hölje
spanning set	mängd som spänner upp, uppspännande mängd
submatrix	undermatris
subspace	underrum, delrum
sufficient condition	tillräckligt villkor
trace	spår
transfer matrix	överföringsmatris
transformation	transformation, avbildning
transpose	transponat
underdetermined system	underbestämt system
unique	entydigt bestämd
unit vector	enhetsvektor
upper triangular	övre triangulär
vector space	vektorrum, linjärt rum
weight	vikt
zero(vector)	noll(vektor)