Tenta MVE275 2014-10-28

Elin Götmark

1. a. $\lambda = -3$ är ett egenvärde om $A\mathbf{x} = -3\mathbf{x}$ har en icke-trivial lösn. $\iff (A+3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ dvs $x_1 + 2x_2 = 0$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar: ja, med egenvektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b. Vi använder algoritmen $[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \quad 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot\left(-\tfrac{1}{6}\right)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & -1/6 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] -9 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right]$$

Går inte! Så A är inte inverterbar.

c. Volymen av enhetskuben E är $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ v.e. Bilden av E under T har då volymen $|\det(A)| \cdot 1$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1 \end{array} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(4-1) = -9.$$

Svar: Volymen av bilden av E är 9 v.e.

d. Om $[v]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2)$, så är

$v = c_1 \mathbb{b}_1 + c_2 \mathbb{b}_2$. Så $v = 3\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}3\\12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\22\end{bmatrix}$.

e) $\begin{bmatrix}A & B\\0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y & Z\\0 & 0 & I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}AX & AY & AZ+B\\0 & 0 & I\end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix}I & 0 & 0\\0 & 0 & I\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}AX = I\\AY = 0\\AZ+B = 0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}X = A^{-1}\\Y = A^{-1}0 = 0\\Z = -A^{-1}B\end{cases}$

f) T ex: $A = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$.

2. a. Vi radreducerar A. Kolonnerna i A som har pivotelement utgör då en bas för Col(A), enligt sats i boken.

$\begin{bmatrix}3 & -6 & 9 & 0\\2 & -4 & 7 & 2\\3 & -6 & 6 & -6\end{bmatrix}\begin{matrix}\frac{1}{3}\\ \\ \frac{1}{3}\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\2 & -4 & 7 & 2\\1 & -2 & 2 & -2\end{bmatrix} \begin{matrix}-2 & -1\end{matrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix} -1 \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} -3 \sim$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Så $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för Col (A).

(b.) Vi vill lösa $A\mathbb{x} = \mathbb{O}$. Enl. radreduceringen i a) är en allmän lösn

$$x_1 - 2x_2 - 6x_4 = 0$$
$$x_3 + 2x_4 = 0$$

dvs

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2x_2 + 6x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Så $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas för Nul(A).

c) Vi vet enligt rangsatsen att

$$\underbrace{\dim \mathrm{Nul}(B)}_{=3} + \mathrm{rang}(A) = 8.$$

Svar: $\mathrm{rang}(A) = 8 - 3 = \underline{\underline{5}}$

3) a, b) Se boken.

c) Vi måste kolla om vektorena är linjärt oberoende; så vi tittar på lösn. till

$$c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbb{O}.$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ 4 \quad -2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \quad 1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{så} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De är alltså linjärt oberoende, och vi kan ta bort den tredje vektorn. Men de första två är linjärt oberoende. Det finns då en bas för W som består av två vektorer.

<u>Svar</u>: dim W = 2.

4. a) Vektorn $(1,1,1)$ är normal till planet och är oförändrad vid rotation. Den är då egenvektor till egenvärdet 1. Alla vektorer i planet $x+y+z=0$ vänds $180°$ och planet är alltså egenrum till egenvärdet -1.

b) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Vi måste välja två linjärt oberoende vektorer i planet $x+y+z=0$. Sätt först $x=0 \Rightarrow z=-y$, vilket ger t.ex. vektorn $(0,1,-1)$.

Om vi istället sätter $y=0$ får vi $z=-x$, vilket tex ger vektorn $(1,0,-1)$.

Så vi kan ta $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, och

$A = PDP^{-1}$.

6. a) Matrisen för T relativt $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ ges av $\left[[T(b_1)]_{\mathcal{C}} \ [T(b_2)]_{\mathcal{C}} \ [T(b_3)]_{\mathcal{C}} \right] =$

$$= \left[[1+t^2 \cdot 1]_{\mathcal{C}} \ [t+t^2 \cdot t]_{\mathcal{C}} \ [t^2+t^2 \cdot t]_{\mathcal{C}} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b.) $$[T(q(t))]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. a. Falskt. Tag tex $A = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\det(A+B) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4$

$\det(A) + \det(B) = 1+1 = 2$.

b) Sant. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \cdot I \cdot A^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} I B = B^{-1}B = I$.

Enligt definitionen av invers är då $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, och AB är inverterbar.

(c.) Falskt. Tag t ex $u_1 = (2,0)$, $v_1 = (0,1)$, och $w_1 = (1,0)$. Då är $u_1 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot w_1$, dvs u_1 är en linjärkomb. av v_1 och w_1, men v_1 är inte en linjärkomb. av u_1 och w_1.

8) Se bohm.