MATEMATIK **Hjälpmedel: ordlistan från kurswebbsidan, ej räknedosa**
Chalmers tekniska högskola Datum: 141028 kl. 14.00 - 18.00
Tentamen Telefonvakt: Christoffer Standar
0703-088304

MVE275 Linjär algebra AT

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32.
För godkänt på kursen skall också Matlabmomentet vara godkänt.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida. Resultat meddelas via Ladok senast tre veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar utom onsdag 9-13, MV:s exp.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för kolonnrummet till A. (3p)

(b) Bestäm en bas för nollrummet till A. (3p)

(c) Låt B vara en 6×8-matris sådan att $\dim \operatorname{Nul}(B) = 3$. Vad kan vi säga om B:s rang? (1p)

3. (a) Definiera vad som menas med ett underrum W till ett vektorrum V. (2p)

(b) Definiera vad som menas med dimensionen av ett underrum W. (1p)

(c) Bestäm dimensionen av $W = \operatorname{Span}\{(-4, 0, 1, 2), (-3, -1, 1, 1), (-6, 2, 1, 4)\}$. (2p)

4. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara rotation med 180 grader kring axeln som går längs med vektorn $(1, 1, 1)$, och låt A vara den tillhörande standardmatrisen.

(a) Vilka är A:s egenvärden och tillhörande egenrum? Obs att du inte behöver göra några beräkningar för att svara på frågan. (3p)

(b) Med hjälp av första deluppgiften, skriv upp en diagonalisering av A (du behöver inte räkna ut A). (3p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. Låt den linjära avbildningen $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ definieras av $T(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{p}(t) + t^2\mathbf{p}(t)$.

(a) Räkna ut matrisen för T relativt baserna $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ och $\mathcal{C} = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$. (4p)

(b) Låt $\mathbf{q}(t)$ vara en vektor i $\mathbb{P}_2$ med koordinaterna $[\mathbf{q}(t)]_{\mathcal{B}} = (3, -1, 2)$. Räkna ut $[T(\mathbf{q}(t))]_{\mathcal{C}}$. (3p)

7. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Om A och B är $n \times n$-matriser, så är $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$. (2p)

(b) Om A och B är inverterbara, så är AB inverterbar och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (2p)

(c) Om $\mathbf{u}$ är en linjärkombination av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$, så är $\mathbf{v}$ en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$. (2p)

8. (a) Definiera vad som menas med en symmetrisk matris. (1p)

(b) Bevisa att om A är en symmetrisk matris, och $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är egenvektorer som hör till två olika egenvärden, så är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala. (4p)

Lycka till!
Elin Götmark

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 141028	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är $\lambda = -3$ ett egenvärde till (2p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}?$$

Hitta i så fall en egenvektor till $\lambda = -3$.
Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna inversen till matrisen, om den existerar: (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -2 & 5 & -16 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Låt E vara enhetskuben vars kanter är enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^3$. Vilken volym har bilden av kuben under avbildningen $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$?
Lösning:

Svar: ....

(d) Vektorn $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ har koordinaterna $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3, -2)$ i basen $\mathcal{B} = \{(1,4), (0,-5)\}$. Räkna ut $\mathbf{v}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt A och B vara kända matriser som dessutom är inverterbara. Räkna ut X, Y, och Z i termer av A och B, om (3p)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Antag att alla matriser har dimensioner sådana att blockmatriserna kan multipliceras ihop.

Lösning:

Svar: ....

(f) Ge exempel på matriser A, B, och C så att $AB = AC$, men $B \neq C$. Ingen av matriserna ska vara nollmatrisen. (2p)

Lösning:

Svar: ....