Lösningar Tenta MVE275

4/1 2016 Elin Götmark

1. Se separat papper på slutet.

2. a. Om $u_1, \dots, u_n$ är en bas kan vi skriva $v = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$. Då är $c_1, \dots, c_n$ koordinaterna för v i basen $u_1, \dots, u_n$.

De är unika.

b. $v = 1\cdot(1,1,1) + 0\cdot(1,2,3) + 1\cdot(1,3,2) =$

$= \underline{(2,4,3)}$

c. $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{T} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

d. $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{T} = \left(\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{T}\right)^{-1}$. Vi inverterar $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{T}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-1)\ (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] (-2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] (-1/3) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] (-2)(-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

Så $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{T} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

3\. a. Om $A = [a_1 \ \dots \ a_n]$, så är kolonnrummet till A $\text{Col } A = \text{Span}\{a_1, \dots, a_n\}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & p+4 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-1) & (-2) & (-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & p+3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1/2) & (1) & (-1) \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p+2 & 0 \end{bmatrix}$ Så om $p \neq -2$ är $\text{rang}(A) = 4$, men om

$\underline{p = -2}$ är $\text{rang}(A) = 3 < 4$.

c. Om $p = -2$ är $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-3)$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Bas för Col A: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:
$$x_1 = 0$$
$$2x_2 = -x_3$$
$$x_4 = 0$$

dvs $\mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Så $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ger en bas för Nul A.

4\. a. Vi vill projicera $u = (1, -2, -1)$ ner på planet. Planets normal är $(1, -1, 2)$.

<u>Lösn 1</u>: Vilken punkt på linjen $(1,-2,-1) + t(1,-1,2)$ ligger i planet? Sätt in i planets ekvation:

$(1+t) - (-2-t) + 2(-1+2t) = 0 \iff$

$1 + 6t = 0 \iff t = -1/6$, vilket ger

$(1,-2,-1) - \frac{1}{6}(1,-1,2) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{8}{6}\right)$

Lösn 2: Välj två vektorer i planet som dessutom är vinkelräta, tex:

$v_1 = (1,1,0)$ och $v_2 = (1,-1,-1)$.

Projektionen blir: $\frac{u \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 =$

$= \frac{-1}{2}(1,1,0) + \frac{4}{3}(1,-1,-1) =$

$= \frac{-3}{6}(1,1,0) + \frac{8}{6}(1,-1,-1) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{8}{6}\right)$

b. λ är ett egenvärde till A om det existerar en vektor $v \neq 0$ så att

$Av = \lambda v$.

c. Planets normal $(1,-1,2)$ är egenvektor till egenvärdet -1, eftersom den vektorn speglas ner till $(-1,1,-2)$.
Alla vektorer i planet är oförändrade, alltså är de egenvektorer till egenvärdet 1.

5. a. i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ är nollelementet i vektorrummet, och uppfyller att summan av diagonalelementen är noll. Alltså är den ett element i V.

ii) Tag två matriser i V, säg $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Då är alltså

$a+d=0$ och $e+h=0$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$(a+e)+(d+h) = \underbrace{(a+d)}_{=0} + \underbrace{(e+h)}_{=0} = 0$, så

deras summa ligger också i V.

iii) Tag ett element i V, säg $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, där $a+d=0$.

$k \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$. Ligger denna i V?

$ka + kd = k\underbrace{(a+d)}_{=0} = 0$. Ja!

Alla tre villkoren för att V ska vara ett underrum är alltså uppfyllda.

b. Systemet kan skrivas $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, där $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vi tar fram egenvärden och egenvektorer till A: $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (-2-\lambda)(4-\lambda)+5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$ dvs $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

$\underline{\lambda_1 = -1}$: $(A + 1\cdot I)\mathbb{x} = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbb{0}.$

Så $x_1 = -5x_2$, och $v_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet -1.

$\underline{\lambda_1 = 3}$: $(A - 3I)\mathbb{x} = \mathbb{0} \iff \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbb{0}.$

Så $x_1 = -x_2$ och $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till egenvärdet 3.

Då är den allmänna lösningen på systemet.

$$\mathbb{x}(t) = c_1 e^{-t}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vi bestämmer c_1 och c_2 mha begynnelse-villkoren:

$$\mathbb{x}(0) = c_1 e^{0}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{0}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi löser detta ekv. system:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \end{array}\right] \textcircled{5} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 13 \end{array}\right] \textcircled{-\tfrac{1}{4}} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -13/4 \end{array}\right] \textcircled{1} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5/4 \\ 0 & 1 & -13/4 \end{array}\right].$$

Så lösningen blir

$$\mathbb{x}(t) = -\frac{5}{4} e^{-t}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{13}{4} e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

6. a. Falskt. Om $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ så svarar A mot rotation med $90°$ i planet.
A saknar reella egenvärden och kan inte diagonaliseras. Men A är inverterbar eftersom $\det(A) = 1$.

b. Sant. A:s nollrum måste ha åtminstone dimension 1 (där A är avbildningens standardmatris) eftersom $\text{rang}(A) + \dim(\text{Nul}(A)) = 3$ enligt rangsatsen. och $\text{rang}(A) \leq 2$. Men då finns ett helt underrum $\text{Nul}(A)$ (som inte bara består av $\mathbf{0}$), där alla vektorer avbildas på samma vektor, nämligen $\mathbf{0}$ i $\mathbb{R}^2$.
Då är avbildningen inte injektiv.

c. Falskt. Motexempel: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
där $\det(A) = -1$.
(Däremot gäller att $\det(A) = \pm 1$ om A är ortogonal, eftersom $A^T A = I$
$\Rightarrow (\det(A))^2 = 1$.)

7. Se boken, sats 1.7.8 och 6.2.4.

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 160104	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (5, 2, -1)$ och $\mathbf{v}_2 = (3, -2, 1)$ linjärt beroende eller oberoende? (2p)

Lösning: De är linjärt oberoende omm $x_1 u + x_2 v_1 + x_3 v_2 = 0$ bara har den triviala lösningen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \textcircled{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Det finns en fri variabel och alltså oändligt många lösn.

Svar: Linjärt beroende.

(b) Ta fram standardmatrisen till den linjära avbildning T som uppfyller $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ och $T(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. (2p)

Lösning: Vi vet att standardmatrisen A ges av $[T(e_1)\ T(e_2)]$

Eftersom avbildningen är linjär är

$$T(e_2) = T(e_2 - e_1) + T(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_2 - e_1 = e_1 + 2e_2$$

Så $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Svar: ....

(c) Beräkna determinanten av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 - 15 - 4(5-6) = -19 - 20 + 24 =$$

Svar: -15

Var god vänd!

(d) Hitta minsta-kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ och (3p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning: $A^TA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 26 \end{bmatrix}$

$A^T\mathbb{b} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ Vi vill lösa $A^TA\mathbb{x} = A^T\mathbb{b}$:

$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 26 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/3 \\ -1/3 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -26/3 & 7/3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 1 & -26/3 & 7/3 \\ 0 & 49/3 & -17/3 \end{bmatrix} \frac{3}{49} \sim \begin{bmatrix} 1 & -26/3 & 7/3 \\ 0 & 1 & -17/49 \end{bmatrix} \frac{26}{3}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{3} - \frac{17 \cdot 26}{49 \cdot 3} \\ 0 & 1 & -17/49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & +33/49 \\ 0 & 1 & -17/49 \end{bmatrix}.$ Så $\hat{\mathbb{x}} = \begin{bmatrix} -33/49 \\ -17/49 \end{bmatrix}$.

Svar: ....

(e) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avgör om 3 är ett egenvärde till A och ta i så fall fram dess egenvektorer.

Lösning: Om 3 är ett egenvärde så har $(A - 3I)\mathbb{x} = \mathbb{0}$ ickettriviala lösningar.

$A - 3I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3 & -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1/3 & 2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = x_3$
$x_2 = 2x_3$ $\quad \mathbb{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ är en lösning.

Svar: Ja, och (1,2,1) är en egenvektor.

(f) Gör en LU-faktorisering av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} -2 \sim \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = U$

Svar: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$