**MATEMATIK**
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

**Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**
Datum: 151027 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Åsa Lideström
0703-088304

**MVE275 Linjär algebra AT**

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Elin Götmark, 070-6787423.

---

## Del 1: Godkäntdelen

**1**. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

**2**. (a) Definiera vad som menas med en bas för ett underrum. (1p)

(b) Låt $\mathbf{v_1} = (1, 0, -2, 0)$, $\mathbf{v_2} = (0, -1, 3, 2)$ och $\mathbf{v_3} = (2, 1, -7, -2)$. Bestäm en ortogonalbas för $W = \text{Span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$. (3p)

(c) Definiera vad som menas med det ortogonala komplementet till ett underrum W. (1p)

(d) Vilken dimension har $W^\perp$, där $W$ är samma som i uppgift b)? (1p)

**3**. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden till $A$. (2p)

(b) Bestäm alla egenvektorer till $A$. (2p)

(c) Är $A$ diagonaliserbar? I så fall, diagonalisera $A$. (Räkna också ut $P^{-1}$.) (2p)

**4**. (a) En linjär avbildning $T$ avbildar punkterna $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 1)$, och $(-1, 2, 0)$ till punkterna $(0, 0, 0)$, $(4, 0, -2)$, $(3, -1, 1)$, och $(-5, 2, 0)$ (i den ordningen). Hitta $T$:s standardmatris. (3p)

(b) De fyra första punkterna i a) spänner tillsammans upp en parallellepiped. Hur många gånger större eller mindre blir parallellepipedens volym när $T$ verkar på den? (2p)

(c) En annan avbildning avbildar de fyra första punkterna i a) på dessa punkter istället: $(1, 0, 0)$, $(-1, 3, 0)$, $(0, 4, -2)$, och $(2, 1, -2)$. Är avbildningen linjär? (1p)

**Var god vänd!**

## Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

**5**. (a) Visa att polynomen $p_1(t) = 4 - t$, $p_2(t) = 1 + 2t + 8t^2$ och $p_3(t) = t(1 + 5t)$ bildar en bas till $\mathbb{P}_2$, det vill säga vektorrummet av alla polynom av högst grad två. (2p)

(b) Ta fram matrisen till avbildningen $T(p(t)) = p'(t) + p(1 - t)$ i basen ovan. (4p)

**6**. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är Falskt så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Om $A$ och $B$ är två matriser som går att multiplicera, så är $(AB)^T = A^T B^T$. (2p)

(b) Det finns ingen $4 \times 7$-matris sådan att $\dim(\text{Nul}(A)) = \dim(\text{Col}(A))$. (2p)

(c) Alla diagonaliserbara matriser är inverterbara. (2p)

**7**. (a) Bevisa att nollrummet till en matris utgör ett underrum. (3p)

(b) Bevisa att om mängden $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ är en ortogonal mängd av vektorer (där ingen av dem är nollvektorn), så utgör mängden en bas för $\text{Span}\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$. (3p)

Lycka till!
Elin Götmark

| Anonym kod | MVE275 Linjär algebra AT 151027 | sid.nummer 1 | Poäng |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1**. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorn $\mathbf{u} = (4, -1, -5)$ en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{v}_1 = (3, 1, -2)$ och $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 4)$? (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ..............................................................

(b) Ge ett exempel på en $3 \times 3$-matris $A$ som är ortogonal, dvs $A^T A = I$. Matrisen ska inte vara diagonal. (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ..............................................................

(c) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

och $\mathbf{b} = (2, a)$. För vilka värden på $a$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unik lösning, inga lösningar, respektive oändligt många lösningar? Kan alla de fallen inträffa?

**Lösning:**

**Svar:** ..............................................................

**Var god vänd!**

(d) Bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Lösning:**

**Svar:** ....................................................................

(e) Bestäm koordinaterna för vektorn $(2, -1)$ i basen $\mathbf{b_1} = (1, -2)$, $\mathbf{b_2} = (0, -1)$. (2p)

**Lösning:**

**Svar:** ....................................................................

(f) En $2 \times 2$-matris $A$ har egenvärdena $-1$ och $1$ med egenvektorer $(1, 3)$ respektive $(-1, 1)$. Diagonalisera $A$ och räkna ut $A^{100}$. (3p)

**Lösning:**

**Svar:** ....................................................................