MATEMATIK **Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**

Chalmers tekniska högskola Datum: 160104 kl. 14.00–18.00

Tentamen Telefonvakt: Olof Giselsson 0703-088304

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2015 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Elin Götmark, 070-6787423.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Vad menas med koordinaterna för en vektor $\mathbf{v}$ i en bas $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$? (1p)

(b) Låt basen $\mathcal{B}$ utgöras av vektorerna $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ och $(1, 3, 2)$. Om en vektor $\mathbf{v}$ har koordinatvektorn $(1, 0, 1)$ i basen $\mathcal{B}$, vad är $\mathbf{v}$? (Dvs, ange $\mathbf{v}$:s koordinater i standardbasen.) (1p)

(c) Ange basbytesmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen. (1p)

(d) Ange basbytesmatrisen från standardbasen till basen $\mathcal{B}$. (3p)

3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & p+4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Definiera vad som menas med kolonnrummet till en matris. (1p)

(b) Vad ska p ha för värde för att $\text{rang}(A) < 4$? (2p)

(c) För detta värde på p, bestäm baser för kolonnrummet och nollrummet till A. (3p)

4. (a) Bestäm den punkt i planet $x - y + 2z = 0$ som ligger närmast punkten $(1, -2, -1)$. (3p)

(b) Definiera vad som menas med ett egenvärde till en $n \times n$-matris A. (1p)

(c) Bestäm egenvärden och egenvektorer till avbildningen som utgörs av spegling i planet $x - y + 2z = 0$ (obs, du behöver inte räkna ut avbildningens standardmatris först). (2p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt V vara mängden av alla 2×2-matriser med egenskapen att summan av elementen på diagonalen är noll. Är V ett underrum av vektorrummet som består av alla 2×2-matriser? (3p)

(b) Lös systemet av differentialekvationer (3p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -2x_1(t) - 5x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t), \end{aligned}$$

där $x_1(0) = 3$ och $x_2(0) = 2$.

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Om A är inverterbar så är A diagonaliserbar. (2p)

(b) Det finns inga injektiva linjära avbildningar från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^2$. (2p)

(c) Om A är en ortogonal matris, så är $\det(A) = 1$. (2p)

7. (a) Bevisa att mängden av vektorer $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_p}\}$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt beroende om $p > n$. (2p)

(b) Bevisa att om A är en symmetrisk matris och $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ är egenvektorer som hör till två olika egenvärden, så är $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}$ ortogonala. (4p)

Lycka till!
Elin Götmark

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 160104	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Är vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (5, 2, -1)$ och $\mathbf{v}_2 = (3, -2, 1)$ linjärt beroende eller oberoende? (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Ta fram standardmatrisen till den linjära avbildning T som uppfyller $T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}$ och $T(\mathbf{e_2} - \mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna determinanten av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Hitta minsta-kvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{b} = (1, 0, -2)$ och (3p)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avgör om 3 är ett egenvärde till A och ta i så fall fram dess egenvektorer.
Lösning:

Svar: ....

(f) Gör en LU-faktorisering av matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

. **Lösning:**

Svar: ....