MATEMATIK **Examinator: Julia Brandes,**

Chalmers tekniska högskola Datum: 161025 kl. 14.00–18.00

Tentamen

MVE275 Linjär algebra AT

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Vi projicerar $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ på vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och får $\frac{3\cdot 1+5\cdot 1}{1+1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{8}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. Avståndet mellan punkten och linjen blir då $\left\|\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

(b)

$$\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX & AY+I \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså matrisekvationerna

$$AX = B \iff X = A^{-1}B \qquad \text{och}$$
$$AY + I = A \iff Y + A^{-1} = I \iff Y = I + A^{-1}.$$

(c)

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 5/4 & 9/4 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5/4 & 9/4 \\ 0 & -10/4 & -50/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5/4 & 9/4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ges av $x_1 = 4x_3$ och $x_2 = -5x_3$, alltså $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} t$. Vi får alltså

$$\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}, \qquad \operatorname{Nul} A = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

(d) Triangelns area är hälften av arean av parallelogrammet som spänns upp av $(3,1)$ och $(2,-6)$. Så triangelarean är $\frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}|-18-2| = 20/2 = 10$.

(e) Ekvationssystemet har en icke-trivial lösning om $\det A = 0$. Vi har alltså $\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & a \end{bmatrix}\right) = a + 7$, vilket är noll om $a = -7$.

(f)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ \mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{III}\to\frac{1}{3}\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}-2\mathrm{III}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\sim_{\mathrm{I}\to\mathrm{I}-2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right].$$

Alltså

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 4/3 \\ -1/6 & 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

2. (a) En vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ är egenvektor till en $n \times n$ matris A om det existerar ett tal λ så att $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

(b) Egenvärdena ges av lösningarna till $\det(A - \lambda\,\mathrm{I}_n) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\
&= (1-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) - \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) + 3\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda) - 3) - (1-\lambda-3) + 3(1 - 3(3-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) + \lambda + 2 + 9\lambda - 24 \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 20.
\end{aligned}$$

Genom att testa olika rötter hittar vi $\lambda_1 = 2$:

$$-8 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 20 = 0.$$

Vi bryter ut $(\lambda - 2)$:

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 20 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 3\lambda + 10).$$

Den ekvationen har lösningar

$$\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2},$$

alltså $\lambda_2 = 10/2 = 5$ och $\lambda_3 = -4/2 = -2$.
Egenvärdena är alltså

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 5, \qquad \lambda_3 = -2.$$

(c) Vi vet enligt sats att det finns tre egenvektorer som är vinkelrätta mot varann.

(d) Vi räknar ut de normaliserade egenvektorerna.
<u>Egenvektor till $\lambda_1 = 2$</u>: Lösning av $(A - 2\,\mathrm{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-3\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim_{\substack{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}:2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{\mathrm{I}\to\mathrm{I}-\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>Egenvektor till $\lambda_2 = 5$</u>: Lösning av $(A - 5\,\mathrm{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\mathrm{I}+4\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-3\mathrm{II}}} \begin{bmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \sim_{\substack{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+\mathrm{I} \\ \mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{I}:7}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{\mathrm{I}\to\mathrm{I}+2\mathrm{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>Egenvektor till $\lambda_3 = -2$</u>: Lösning av $(A + 2\,\mathrm{I}_3)\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{\mathrm{II}\to\mathrm{II}+3\mathrm{I}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\mathrm{I}+\frac{5}{14}\mathrm{II} \\ \mathrm{II}\to-\frac{1}{14}\mathrm{II}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi får alltså $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Så $A = PDP^T$, där

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

3. (a) $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ är mängden av alla linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

(b) Sätt $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi fixar en vektor vinkelrätt mot $\mathbf{b}_1$ genom att räkna

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En vektor vinkelrätt mot $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är given genom

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|^2}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Efter normaliseringen blir basen

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Koordinaterna blir

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+1+3) = \frac{6}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2-2+3) = \frac{3}{\sqrt{6}}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2+3) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Koordinatvektorn blir alltså $\begin{bmatrix} 6/\sqrt{3} \\ 3/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

4. (a) Vad händer med standardbasvektorerna:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}_1 \to \mathbf{0}, \\ \mathbf{e}_2 \to \mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_2 \to -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3 \to -\mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_3 \to \mathbf{e}_3. \end{gathered}$$

Standardmatrisen till T är alltså

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi kollar om $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{II}\to\mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}\to\mathrm{IV}+\mathrm{I}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{IV}\to\mathrm{IV}+3\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\leftrightarrow-\mathrm{III}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det finns bara två pivotpositioner och alltså finns det icke-triviala lösningar. Vektorerna är alltså inte linjärt oberoende.

Del 2: Överbetygsdelen

5. (a) Vi kontrollerar att U uppfyller kriteria för att vara ett underrum:

i. Om $p(x) = 0$ för alla x, så är $p(1) = p(-1) = 0$, så nollvektorn ligger i U.

ii. Tag $p \in U$ och $a \in \mathbb{R}$. Då är $(ap)(1) = a \cdot p(1) = a \cdot 0 = 0$, och samma för $(ap)(-1)$, så $ap \in U$.

iii. Tag $p, q \in U$. Då är $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$, och samma för $(p+q)(-1)$. Alltså är $p + q \in U$.

Alltså är U ett underrum.

(b) Sätt $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Villkoret $p(1) = 0$ ger $a + b + c + d = 0$, och villkoret $p(-1) = 0$ ger $-a+b-c+d = 0$. Fyra variabler och två uppenbart inte ekvivalenta ekvationer ger en tvådimensionella lösningsmängd. Två linjärt oberoende lösningar är $p_1(x) = x^2 - 1$ och $p_2(x) = x^3 - x$, som vi då kan ta som bas för U. För att utvidga detta till en bas för V behöver vi ett polynom som uppfyller $p(1) = p(-1) \neq 0$, t.ex. $p_3(x) = 1$. Då är $\{p_1, p_2, p_3\}$ en bas för V. För att utvidga till en bas för hela $\mathbb{P}^3$ behöver vi ett polynom som uppfyller $p(1) \neq p(-1)$, t.ex. $p_4(x) = x$. Då är $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en bas för $\mathbb{P}^3$.

6. (a) **Falskt:** Tag t.ex. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, då är

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \text{men} \quad \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| = 1 - 1 = 0.$$

(b) **Falskt:** Vi skriver ekvationssystemet som $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då är A en 7×9 matris, och dimensionssatsen säger att $\dim \operatorname{Nul} A + \dim \operatorname{Col} A = 9$. Eftersom $\dim \operatorname{Col} A$ kan vara högst 7, så betyder det att $\dim \operatorname{Nul} A \geq 2$. Men om alla lösningar är multipler av en fix lösning så är $\dim \operatorname{Nul} A = 1$. Motsägelse!

(c) **Sant:** Tag t.ex. $A = \mathrm{I}_4$, då är $\det(A) = 1$, och

$$\det(2A) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = 16 = 16 \cdot 1 = 16 \cdot \det A.$$

7. (a) Vi har $(A^T)^{-1}A^T = \mathrm{I}_n = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$. Genom att multiplicera med $(A^T)^{-1}$ från högerleden får vi resultatet.

(b) Låt mängden vara given av $B = \{\mathbf{0}, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$, då är $a\mathbf{0} + 0\mathbf{b}_1 + \cdots + 0\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ en linjärkombination som ger noll men där inte alla koefficienter är lika med noll. Vektorerna är alltså inte linjärt oberoende.