MATEMATIK | **Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 161025 kl. 14.00–18.00
Tentamen

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2016 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Julia Brandes, 0722-939259.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Ge definitionen på en egenvektor till en matris. (1p)

(b) Ta fram egenvärdena till matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Vad kan du veta om egenvektorerna till matrisen A innan du räknar ut dem och innan du känner till egenvärdena? (1p)

(d) Diagonalisera matrisen A (du behöver inte räkna ut P^{-1}). (2p)

3. (a) Definiera vad som menas med Span$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$. (1p)

(b) Låt $\mathbf{v_1} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v_2} = (1, 0, 1)$ och $\mathbf{v_3} = (1, 1, 2)$. Bestäm en ortonormal bas för Span$(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$. (3p)

(c) Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ i den nya ortogonala basen. (2p)

4. (a) Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som först speglar i xy-planet, sedan roterar 180° kring x-axeln, och sedan projicerar på yz-planet. Ange avbildningens standardmatris. (3p)

(b) Är vektorerna $\mathbf{v_1} = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{v_2} = (3, 6, 5, 0)$ och $\mathbf{v_3} = (1, 2, 1, 2)$ linjärt oberoende? (3p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt $\mathbb{P}^3$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 3, och U vara mängden som består av alla element i $\mathbb{P}^3$ som uppfyller $p(1) = p(-1) = 0$. Visa att U är ett underrum. (2p)

(b) Hitta en bas för U. Utöka sedan denna bas till underrummet V som består av alla element i $\mathbb{P}^3$ som uppfyller $p(1) = p(-1)$. Utöka slutligen basen till hela $\mathbb{P}^3$. (6p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Om $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ så är $||\mathbf{u} - \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}|| - ||\mathbf{v}||$. (2p)

(b) Det finns ett homogent linjärt ekvationssystem med sju ekvationer och nio variabler sådant att alla lösningar är multipler av en fix lösning. (2p)

(c) Det finns en matris A sådan att $\det(2A) = 16 \det(A)$. (2p)

7. (a) Bevisa att $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. (2p)

(b) Bevisa att om en mängd vektorer innehåller nollvektorn, så är mängden linjärt beroende. (2p)

Lycka till!
Julia Brandes

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 161025	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna avståndet mellan $(3, 5)$ och linjen som ges av $(x, y) = t(1, 1)$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna matriserna X och Y i termer av matriserna A och B, om (2p)

$$\begin{bmatrix} A & I \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Antag att A och B är inverterbara.

Lösning:

Svar: ....

(c) Beräkna nollrum och kolonnrum för matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Hitta arean av triangeln som har vektorerna $(3, 1)$ och $(2, -6)$ som två av sina sidor. (2p)
Lösning:

Svar: ....

(e) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & a \end{bmatrix}.$$

Vad ska a ha för värde för att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ska ha en icke-trivial lösning?
Lösning:

Svar: ....

(f) Invertera matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

. **Lösning:**

Svar: ....