MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Examinator: Julia Brandes,
Datum: 161220 kl. 14.00–18.00

MVE275 Linjär algebra AT

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Utan egenvektor: Rotationsmatris med $\pi/2$ i $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Med precis en egenvektor: Rotationsmatris med $\pi/2$ kring z-axeln i $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi löser

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{II}\to\mathrm{II}+4\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-3\mathrm{I}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{II}\to-\frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-2\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim_{\mathrm{I}\to\mathrm{I}-\mathrm{II}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Alltså är $\mathbf{u} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ och vi har linjärkombinationen $\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$.

(c) Matrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Basbytematrisen $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ är given av

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Det inversa basbyte beskrivs alltså av matrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1}$. Vi räknar

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{I}\to\mathrm{I}-\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$
$$\sim_{\substack{\mathrm{III}\to\mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\to\mathrm{I}+\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{III}\to-\frac{1}{6}\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\to\mathrm{I}-4\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}+\mathrm{III}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 & 7/6 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/3 \end{array}\right].$$

(e) Första fallet: Eftersom $\dim \mathrm{Col}\, A = n - \dim \mathrm{Nul}\, A = 8 - 3 = 5 < 6$ så spänner A:s kolonner inte upp hela $\mathbb{R}^6$.

Andra fallet: Nu har vi $\dim \mathrm{Col}\, A = n - \dim \mathrm{Nul}\, A = 8 - 2 = 6$. Kolonnrummet är ett delrum av $\mathbb{R}^6$, men varje mängd av 6 linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^6$ spänner upp $\mathbb{R}^6$.

Tredje fråga: Om $\mathrm{Nul}\, A = 1$ då måste vi enligt dimensionssatsen ha $\dim \mathrm{Col}\, A = 8 - 1 = 7$. Men kolonnrummet är ett delrum av $\mathbb{R}^6$, då kan det finnas högst 6 linjärt oberoende vektorer. Därmed är det omöjligt att ha $\dim \mathrm{Nul}\, A = 1$.

(f) Vi utvecklar längs sista kolonnen, och sen längs andra raden. Då få vi

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -4\det\left(\begin{bmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{bmatrix}\right) = (-4)\cdot 3 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -12(a-0) = -12a.$$

Matrisen är alltså inverterbar för alla $a \neq 0$ och för alla $b \in \mathbb{R}$.

2. (a) Två vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ är ortogonala om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

(b) Vi börjar med $\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Då blir

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{b}_1\|^2}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 1 \\ -2/5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 0, \end{aligned}$$

alltså

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Det systemet löser vi genom att räkna

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix};$$

lösningarna är alltså givna genom $x_1 = -2x_3$ och $x_2 = 2x_3 + x_4$, alltså

$$\begin{bmatrix} -2x_3 \\ 2x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_4.$$

Vektorerna $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bilder alltså en bas för $U^\perp$.

(d) Vi börjar med $\mathbf{c}_1 = \mathbf{u}_1$. Då blir

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{c}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{c}_1 \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom alla vektorer i U är ortogonala med alla vektorer i $U^\perp$ så får vi en ortogonalbas till $\mathbb{R}^4$.

3. (a) Systemet kan skrivas som

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -7 & -6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t).$$

Vi söker egenvärden och egenvektorerna till matrisen: det $\begin{bmatrix} -7-\lambda & -6 \\ 9 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (-7-\lambda)(8-\lambda)+54 = \lambda^2+\lambda-56+54 = \lambda^2+\lambda-2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Vi har alltså egenvärdena $\lambda_1 = -1$ och $\lambda_2 = 2$. Egenvektorn till $\lambda_1 = -1$ är lösningen till

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alltså $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Egenvektorn till $\lambda_2 = 2$ ges av lösningen till

$$\begin{bmatrix} -9 & -6 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alltså $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Vi får alltså två linjärt oberoende lösningar till våra differentialekvationer, nämligen

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\mathbf{v}_1(t), \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\mathbf{v}_2(t).$$

Den allmänna lösningen ges då av

$$\mathbf{x}(t) = c_1e^{-t}\mathbf{v}_1(t) + c_2e^{2t}\mathbf{v}_2(t)$$

med fria konstanter c_1 och c_2.
Vi löser nu begynnelsevärdeproblemet: Det krävs att

$$\begin{aligned} x_1(0) &= c_1 + 2c_2 = 0 \\ x_1'(0) &= -c_1 + 4c_2 = 1, \end{aligned}$$

vi måste alltså lösa systemet

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/6 \end{array}\right].$$

Lösningen blir

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -1/3e^{-t} + 1/3e^{2t} \\ x_2(t) &= 1/3e^{-t} - 1/2e^{2t}. \end{aligned}$$

(b) Se nästa sida.

4. Vi beräknar egenvärdena:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix}\right) = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 9 - 16 = \lambda^2 - 25;$$

egenvärdena är alltså $\lambda_{1,2} = \pm 5$. Egenvektor till $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

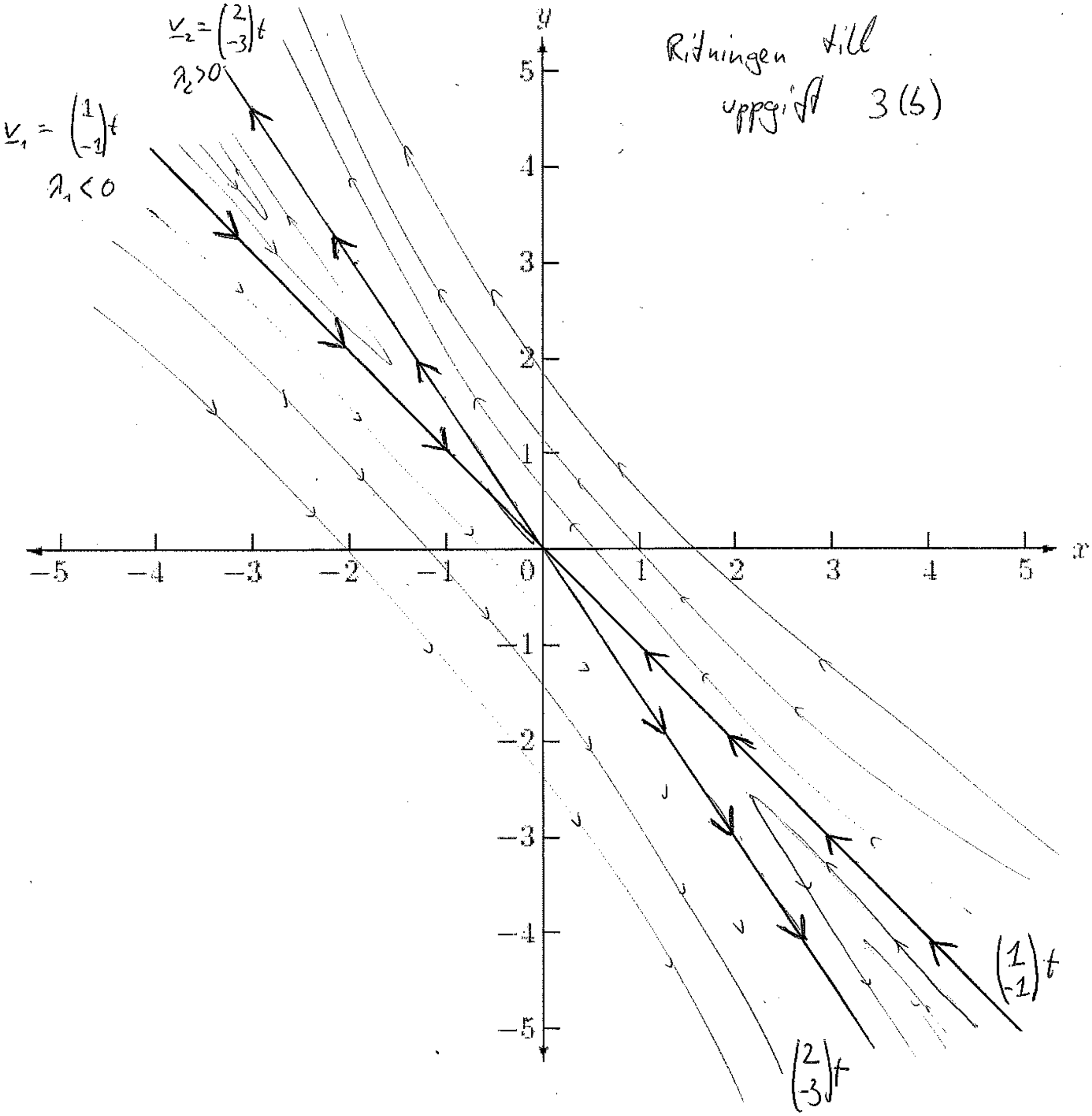
alltså $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Egenvektor till $\lambda_2 = -5$:

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alltså $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Vi normaliserar: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_2$. Eftersom A är symmetrisk får vi en ON-matris där transponatet är lika med inversen. Alltså

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Ritningen till uppgift 3(b)



Del 2: Överbetygsdelen

5. (a) Standardbasen för $\mathcal{P}_n$ är $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, och därmed $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

(b) Vi analyserar basvektorerna: $T(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$, $T(x) = \frac{1}{2}(x - x) = 0$, $T(x^2) = \frac{1}{2}(x^2 + x^2) = x^2$, $T(x^3) = \frac{1}{2}(x^3 - x^3) = 0$, och allmänt

$$T(x^k) = \frac{1}{2}(x^k + (-x^k)) = \begin{cases} x^k & \text{om } k \text{ är jämnt,} \\ 0 & \text{om } k \text{ är udda.} \end{cases}$$

Vi ser alltså att $1, x^2, x^4, \ldots$ är egenvektorer till egenvärde 1, och $x, x^3, x^5, \ldots$ är egenvektorer till egenvärde 0. Avbildningsmatris är alltså

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

(c) Vi får

$$S(p(x)) = p(x) - T(p(x)) = p(x) - \frac{p(x) + p(-x)}{2} = \frac{p(x) - p(-x)}{2}.$$

Genom att analysera basvektorerna ser vi att

$$S(x^k) = \frac{1}{2}(x^k - (-x^k)) = \begin{cases} 0 & \text{om } k \text{ är jämnt,} \\ x^k & \text{om } k \text{ är udda.} \end{cases}$$

och den har egenvektorer $1, x^2, x^4, \ldots$ till egenvärde 0 och $x, x^3, x^5, \ldots$ till egenvärde 1.

6. (a) **Falskt:** Ta till exempel $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, då spänner $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ upp bara ett en-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^2$.

(b) **Sant:** Vi har $\operatorname{Col} A \subseteq \mathbb{R}^m$, men om det finns $\mathbf{b}$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har inga lösningar, så spänner A:s kolonner inte upp hela $\mathbb{R}^m$, och då måste vi ha $\dim \operatorname{Col} A < \dim \mathbb{R}^m = m$.

(c) **Falskt:** Tag t.ex. $A = \mathrm{I}_2$, då är $\det(A) = 1$, och

$$\det(-A) = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1)\cdot(-1) = 1 = \det A.$$

7. (a) Vi har

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2,$$

och

$$(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2.$$

Men $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta \le \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, och alltså

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Å annan sidan gäller det att $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta \ge -\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, och därmed

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \ge \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)^2.$$

(b) Vi kan använda ovanstående argument: Om $\lambda > 0$ så pekar $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ åt samma hållet, och vinkeln mellan dem är $\theta = 0$. Då har vi $\cos\theta = 1$ och alltså

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\cos 0\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Om $\lambda < 0$ så pekar $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ i motsatta håll, vinkeln är alltså $\theta = \pi$, och därmed

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\cos\pi\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)^2.$$