MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: bifogat papper med engelsk-svensk ordlista
Datum: 161220 kl. 14.00–18.00

MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2016 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Julia Brandes, 0722-939259.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Vad betyder det att två vektorer är ortogonala? (1p)

(b) Hitta en ortogonalbas $\mathcal{B}$ till $U = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ där $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. (1p)

(c) Genom att betrakta ekvationssystemet $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2$, hitta en bas till U:s ortogonala komplement $U^\perp$. (2p)

(d) Hitta även en ortogonalbas $\mathcal{C}$ till $U^\perp$. Är $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ en ortogonalbas till $\mathbb{R}^4$? (2p)

3. (a) Ange den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer (4p)

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -7x_1(t) - 6x_2(t) \\ x_2'(t) &= 9x_1(t) + 8x_2(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$.

(b) Rita fasdiagrammet för lösningen. (2p)

4. Diagonalisera matrisen (6p)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. (a) Låt $\mathcal{P}_n$ vara vektorrummet av polynom av grad högst n. Ange standardbasen för $\mathcal{P}_n$ och bestäm $\dim \mathcal{P}_n$. (1p)

(b) Låt $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ vara avbildningen som definieras genom $T(p(x)) = \frac{1}{2}(p(x) + p(-x))$. Bestäm egenvektorerna och egenvärdena till T, och ange avbildningsmatrisen A i $\mathbb{R}^{n+1}$ som motsvarar T. (3p)

(c) Hitta en avbildning $S : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ så att $T(p(x)) + S(p(x)) = p(x)$. Vilka polynom $p \in \mathcal{P}_n$ är då egenvektorer till S, och med vilka egenvärden? (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är Falskt så måste du även illustrera varför med ett exempel som motsäger påståendet.

(a) Varje mängd av k vektorer i $\mathbb{R}^k$ spänner upp $\mathbb{R}^k$. (2p)

(b) Låt A vara en $m \times n$ matris. Om det finns $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ så att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har inga lösningar, så är $\operatorname{rank} A < m$. (2p)

(c) Det gäller att $\det(-A) = -\det(A)$ för alla inverterbara matriser A. (2p)

7. (a) Bevisa att $(\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)^2 \leq \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. (4p)

(b) Anta nu att $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är parallella, alltså $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$ för någon skalär λ. Visa då att $(\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ om $\lambda < 0$, och $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$ om $\lambda > 0$. (2p)

Tips: Kom ihåg att för två vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan vektorerna.

Lycka till!
Julia Brandes

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 161220	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Ange en (kvadratisk) matris utan reella egenvärden, och en matris (kvadratisk, större än 1×1) med precis ett egenvärde. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Låt (2p)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Är $\mathbf{u} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$? Om ja, skriv $\mathbf{u}$ som linjärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange matrisen till den kvadratiska formen $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - x_2^2$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

Var god vänd!

(d) Hitta basbytematrisen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}{P}$, där $\mathcal{E}$ är standardbasen i $\mathbb{R}^3$ och (3p)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Lösning:

Svar: ....

(e) Låt A vara en 6×8 matris med $\dim \operatorname{Nul} A = 3$. Avgör om kolonnerna i A spänner upp hela $\mathbb{R}^6$. Vad händer om $\dim \operatorname{Nul} A = 2$? Är det möjligt att ha $\dim \operatorname{Nul} A = 1$? (3p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Låt (2p)

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

För vilka värden på a och b är A inverterbar?

Lösning:

Svar: ....