MATEMATIK **Examinator: Julia Brandes,**
Chalmers tekniska högskola Datum: 170819 kl. 9.30 - 12.30
Tentamen

MVE275 Linjär algebra AT

Del 1: Godkäntdelen

1. (a) Vi har det $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & a \end{vmatrix} = a-8$, alltså behöver vi att $a=8$ för att ha oäntligt många lösningar. Vi löser nu

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & b \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & b+4 \end{array}\right],$$

vilket är lösbart om $b=-4$.

(b)

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 9 \\ -4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -13 \end{array}\right] \underset{\substack{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}+4\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-2\mathrm{I}}}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & -13 \\ 0 & 9 & -45 \\ 0 & -7 & 35 \end{array}\right] \underset{\substack{\mathrm{II}\to\frac{1}{9}\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}+7\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\to\mathrm{I}-2\mathrm{II}}}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

alltså

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 3x^3 \\ 2x_1 + 5x_2 \\ -3x_1 + x_3 \end{bmatrix} \\ = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 3x_1x_3 + x_3^2 \\ = 4x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 5x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

(d) De är ortogonala eftersom

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -1 + 1 = 0.$$

Vidare får vi

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \frac{5}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}.$$

(e) Vi tar $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1}{1+1+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(f)

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+\mathrm{I}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+2\mathrm{II}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\mathrm{I}+2\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}+\mathrm{III}}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

2. (a) Längden av en vektor $\mathbf{v}$ är given genom $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$.

(b) Vi ska hitta en approximativ lösning till systemet

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Efter att multiplicera med $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ blir det

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix},$$

och vi räknar

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\frac{1}{5}\mathrm{I} \\ \mathrm{II}\to\frac{1}{3}\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/5 & 1 \\ 1 & 1 & 2/3 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{II}\to\mathrm{II}-\mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3/5 & 1 \\ 0 & 2/5 & -1/3 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{II}\to\frac{5}{2}\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\to\mathrm{I}-\frac{3}{5}\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -5/6 \end{array}\right].$$

Minsta-kvadrat-lösningen är alltså $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -5/6 \end{bmatrix}$, som motsvarar linjen $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{6}$.

(c) Linjen går genom punkterna $(0,-5/6), (1,2/3), (2,11/6)$. Avståndet blir

$$\sqrt{(-1-(-5/6))^2 + (1-2/3)^2 + (2-11/6)^2} = \sqrt{1/36 + 1/9 + 1/36} = \sqrt{6/36} = 1/\sqrt{6}.$$

3. (a)

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = (-1)\cdot\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = (-1)\cdot 1\cdot\det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= -((-2)\cdot 0 - (-1)\cdot 3) = -3.$$

(b) B uppstår genom att byta de första två kolonner i A. Det betyder att $\det B = -\det A = 3$.
C är A där den första kolonnen har tredubblats. Det betyder att $\det C = 3\det A = -9$.

(c) Volymen ges av absolutbeloppet av

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 2\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -2.$$

Volymen är alltså 2.

4. (a) Vi måste först beräkna T på standardbasvektorerna. Genom att invertera matrisen har vi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{I}\to\frac{1}{3}\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{II}+\mathrm{II}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{III}\to\frac{1}{6}\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}-3\mathrm{III}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/6 \end{array}\right].$$

Standardbasvektorerna kan alltså skrivas som

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Det betyder att

$$T(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{3}T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{6}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{e}_3) = -\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{6}T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Standardmatrisen är alltså

$$A = (T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), T(\mathbf{e}_3)) = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har

$$\det \begin{bmatrix} 2/3-\lambda & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3-\lambda \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{3}-\lambda\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)$$
$$= \frac{8}{27} - \frac{4}{3}\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - \frac{2}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\lambda$$
$$= -\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda(\lambda-1)^2.$$

Egenvärdena är alltså 0 (en gång)och 1 (två gånger). För att hitta egenvektorn till $\lambda = 0$ räknar vi

$$A - 0\,\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III} \\ \mathrm{I}\to 3\mathrm{I} \\ \mathrm{II}\to 3\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\to 3\mathrm{III}}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{II}\to\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}+2\mathrm{I}}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\underset{\substack{\mathrm{II}\to\frac{1}{3}\mathrm{II} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}+3\mathrm{II} \\ \mathrm{I}\to\mathrm{I}+\mathrm{II}}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

egenvektorn är alltså $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Egenvektorerna till $\lambda - 1$ är lösningarna till $A - \mathrm{I} = 0$, där

$$A - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

alltså $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.
Eftersom matrisen A är symmetrisk så är egenrummen ortogonala. (Man kan också kolla att $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$). Avbildningen beskriver den ortogonala projektionen på planet $x + y + z = 0$.

Del 2: Överbetygsdelen

5. (a) Vi kollar vad som händer på standardbasvektorerna:

$$T(p_1) = \begin{bmatrix} p_1(-1) \\ p_1(0) \\ p_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(p_2) = \begin{bmatrix} p_2(-1) \\ p_2(0) \\ p_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T(p_3) = \begin{bmatrix} p_3(-1) \\ p_3(0) \\ p_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Genom 'översättningen' har vi $M(\mathbf{e}_1) = T(p_1)$, $M(\mathbf{e}_2) = T(p_2)$, $M(\mathbf{e}_3) = T(p_3)$, avbildningsmatrisen blir alltså

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_{\substack{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}\to\mathrm{III}-\mathrm{I}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim_{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+\mathrm{II}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim_{\substack{\mathrm{III}\to\frac{1}{2}\mathrm{III} \\ \mathrm{II}\to\mathrm{II}-\mathrm{III}}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right].$$

(c) Matrisen A är en basbytematris som avbilder ett polynoms koefficientvektor på dess värdevektorn $(p(-1), p(0), p(1))$. Vi beräknar polynomet med värdena $p(-1) = 1, p(0) = -1, p(1) = 0$ genom att beräkna

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Polynomet är alltså $p(x) = -1 - 1/2x + 3/2x^2$.
Eftersom basbytematriser är entydiga, så avbilder A^{-1} värdevektorer entydigt på koordinatvektorer till polynom.

6. (a) **Sant:** Ekvationssystemets lösningar har formen $\mathbf{x_b} + \mathbf{x_0}$ där $\mathbf{x_b}$ är en partikulär lösning till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{x_0}$ är en lösning till det homogena systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Enligt dimensionssatsen har vi att $\dim \operatorname{Nul} A = n - \dim \operatorname{Col} A$, men eftersom $\dim \operatorname{Col} A \leq m < n$ så har vi $\dim \operatorname{Nul} A > 0$. Följaktigen finns det oändligt många val för den homogena lösningen. Därför finns det oäntligt många lösningar så snart det finns några lösningar alls.

(b) **Falskt:** Om A är en 3×2 matris, till exempel $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, då är $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$, men kolonnrummet är $\operatorname{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \neq \mathbb{R}^3$.

(c) **Falskt:** Ta t.ex. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, då är $A + B = \mathrm{I}_2$, och därför $\det(A + B) = 1$. Å annan sidan har vi tydligen $\det A = 0 = \det B$.

7. (a) Om A är diagonaliserbar så finns det en basbytematris P så att $A = PDP^{-1}$, där D är en diagonalmatris med egenvärdena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen. Om vi tar determinanten blir det

$$\det A = \det(PDP^{-1}) = \det P \det D \det P^{-1} = \det P \det D (\det P)^{-1} = \det D,$$

där vi utnyttjade att $\det(P^{-1}) = 1/\det P$. Men D är en diagonalmatris som har $\det D = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

(b) Ortonormalmatriser uppfyller $A^T = A^{-1}$. Om vi då tar determinanten ser vi att

$$\det A = \det(A^T) = \det(A^{-1}) = 1/\det A.$$

Då får vi ekvationen $\det A = 1/\det A$, vilket är likvärdigt med $(\det A)^2 = 1$. Men denna ekvation är uppfylld bara för $\det A = 1$ eller $\det A = -1$.