MVE275 Linjär algebra AT

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar.
För godkänt på tentan krävs 25 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från 2016 räknas med, men maximal poäng på denna del är 32. För betyg 4 eller 5 krävs 33 poäng totalt varav minst 4 på överbetygsdelen, och för betyg 5 krävs 42 poäng totalt varav minst 6 på överbetygsdelen.
Examinator: Julia Brandes, 031-772-5372, 0722-939259.
Telefonvakt: Adam Malik, 031-772-5325.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Definiera vad menas med längden av en vektor. (1p)

(b) Hitta linjen som bäst approximerar punkterna $(0,-1),(1,1),(2,2)$. (4p)

(c) Beräkna felet i approximationen. (1p)

3. Låt

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna $\det A$. (2p)

(b) Bestäm också $\det B$ och $\det C$. (Detta krävs ingen ytterligare räkning!) (2p)

(c) Bestäm volymen av parallelepipeden (tredimensionella parallelogrammen) som definieras av vektorerna (2p)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Låt $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vara avbildningen som är given genom (3p)

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ange avbildningens standardmatris.

(b) Bestäm avbildningens egenvektorer och egenvärden, och tolka avbildningen geometriskt. (3p)

Var god vänd!

Del 2: Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Låt $\mathcal{P}_2$ vara vektorrummet av alla polynom med grad högst 2. Då har vi standardbasen $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2$, och genom att avbilda $p_1 \mapsto \mathbf{e}_1$, $p_2 \mapsto \mathbf{e}_2$, $p_3 \mapsto \mathbf{e}_3$ har vi en isomorfism $\mathcal{P}_2 \cong \mathbb{R}^3$ där ett polynom $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$ avbildas på sin koefficientvektor $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Vi kan alltså 'översätta' polynom till vektorer i $\mathbb{R}^3$ och tvärtom.

(a) Betrakta avbildningen $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definierad genom (2p)

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix},$$

och ange avbildningsmatrisen A för avbildningen $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som motsvarar T.

(b) Invertera A. (2p)

(c) Med hjälp av (b), hitta polynomet $p \in \mathcal{P}_2$ som uppfyller $p(-1) = 1, p(0) = -1, p(1) = 0$. Visa att varje polynom med grad högst två är entydigt bestämt när man känner till värdena i $-1, 0, 1$. (2p)

6. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna respektive falska. Alla svaren måste motiveras, rätt svar utan motivering belönas ej. Du får citera satser från boken i ditt resonemang. Om du hävdar att ett påstående är FALSKT så måste du även illustrera varför (t.ex. med ett exempel som motsäger påståendet).

(a) Om A är en $n \times m$ matris med $m > n$, så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ antingen inga eller oäntligt många lösningar. (2p)

(b) Om A är en $m \times n$ matris med $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$, så gäller $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^m$. (2p)

(c) Det gäller att $\det(A + B) = \det A + \det B$. (2p)

7. (a) Bevisa att om en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (räknade så många gånger de förekommer), så är $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$. (3p)

(b) Bevisa att $\det A = 1$ eller $\det A = -1$ för alla ortonormalmatriser A. (3p)

Lycka till!
Julia Brandes

Anonym kod	MVE275 Linjär algebra AT 20170819	sid.nummer **1**	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) För vilka värden av a och b har systemet (2p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ b \end{bmatrix}$$

oändligt många lösningar?

Lösning:

Svar: ....

(b) Beräkna koordinatvektorn av $\mathbf{v}$ i basen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, där (2p)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ -13 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(c) Ange den kvadratiska formen som tillhör matrisen (2p)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....

(d) Visa att vektorerna $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ är ortogonala, och beräkna projektionen av $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på $\mathbf{v}_1$-$\mathbf{v}_2$-planet. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Hitta en OG-bas för span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$. (2p)

Lösning:

Svar: ....

(f) Invertera matrisen (3p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Lösning:

Svar: ....