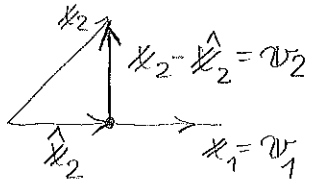
(6.4) Gram-Schmidtprocessen
Har alla underrum en OG-bas?

<u>Problem</u>: Vi har en bas $\mathcal{B}$ till W, men vi skulle vilja ha en OG-bas istället.

<u>Ex.</u> Låt $W = \text{Span}\{x_1, x_2, x_3\}$ där $x_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Hitta en OG-bas för W.

- som första basvektor kan vi ta $v_1 = x_1$. $v_1 \cdot v_1 = 12$.
- 

sätt $v_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 =$

$$= x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 = x_2 - \frac{-36}{12} v_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(eftersom $v_1 \cdot x_2 = -6 - 24 - 2 - 4 = -36$)

OBS: $\text{Span}\{x_1, x_2\} = \text{Span}\{v_1, v_2\}$.

- projicera ner x_3 på planet som spänns upp av v_1 och v_2 och få $\hat{x}_3$. Sätt sedan $v_3 = x_3 - \hat{x}_3$.

$v_2 \cdot v_2 = 12$, $x_3 \cdot v_1 = -6 + 9 + 6 - 3 = 6$, $x_3 \cdot v_2 = 18 + 3 + 6 + 3 = 30$.

$$x_3 = \frac{x_3 \circ v_1}{v_1 \circ v_1} v_1 + \frac{x_3 \circ v_2}{v_2 \circ v_2} v_2 = \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{12}_{2}} v_1 + \frac{\cancel{30}^{5}}{\cancel{10}_{2}} v_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 + 15/2 \\ 3/2 + 5/2 \\ 1/2 + 5/2 \\ 1/2 - 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}. \qquad v_3 = x_3 - \hat{x}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Test: $v_1 \circ v_3 = 0$, $v_2 \circ v_3 = 0$.

SAMMANFATTNING:

Sats 6.11 (Gram-Schmidtprocessen)

Låt $\{x_1, \dots, x_p\}$ vara en bas till ett underrum W i $\mathbb{R}^n$. Då finns det en OG-bas $\{v_1, \dots, v_p\}$ till W, där

$$v_1 = x_1$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \circ v_1}{v_1 \circ v_1} v_1$$

$$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \circ v_1}{v_1 \circ v_1} v_1 - \frac{x_3 \circ v_2}{v_2 \circ v_2} v_2$$

$$\vdots$$

$$v_p = x_p - \frac{x_p \circ v_1}{v_1 \circ v_1} v_1 - \frac{x_p \circ v_2}{v_2 \circ v_2} v_2 - \dots - \frac{x_p \circ v_{p-1}}{v_{p-1} \circ v_{p-1}} v_{p-1}.$$

Dessutom är

$$\text{Span}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

för $k = 1, \dots, p$.

TIPS: Ibland kan v_k bli ngt med bråktal. Det är helt ok att ta en multipel av v_k istället för att få enklare räkningar.

<u>OBS.</u> Vi kan normera $\{v_1, \dots, v_p\}$ för att få en ON-bas $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|^2}, \dots, \frac{v_p}{\|v_p\|^2}\right\}$ för W.

OBS. $A = [a_1, \dots, a_p]$ $p \times n$-matris

Om $a_1, \dots, a_p$ är linjärt oberoende, kör GS-processen:

$$\{a_1, \dots, a_p\} \rightsquigarrow \{v_1, \dots, v_p\}$$

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \cdots & \frac{v_p}{\|v_p\|} \end{bmatrix} \quad \text{ON-matris}$$

$$R = \begin{bmatrix} v_1 \circ a_1 & v_1 \circ a_2 & \cdots & v_1 \circ a_p \\ 0 & v_2 \circ a_2 & \cdots & v_2 \circ a_p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & v_p \circ a_p \end{bmatrix} \quad p \times p\text{-matris}$$

Då gäller: $A = QR$ (kallas: QR-faktorisering av A.)

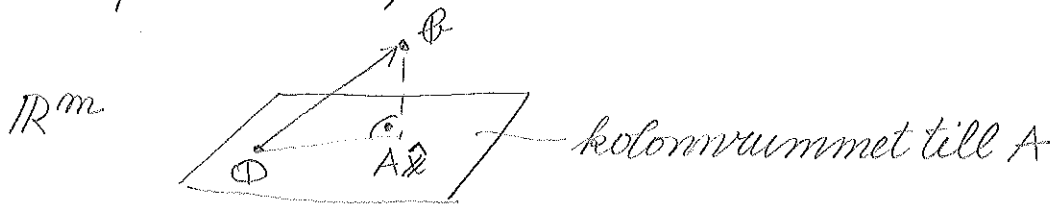
(6.5) Minska kvadratmetoden:

Problem: vi vill lösa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, men det finns ingen lösning.
Kan vi hitta $\mathbf{x}$ s.a. $A\mathbf{x}$ är så nära $\mathbf{b}$ som möjligt?
Dvs: $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$ ska vara så lite som möjligt.

Def. A $m \times n$-matris, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
En <u>minska-kvadrat lösning</u> till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller:

$$\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(typiskt fall: $m > n$)



$A\hat{\mathbf{x}}$ är punkten i Col A som ligger närmast $\mathbf{b}$.
Hur hittar vi $\hat{\mathbf{x}}$?

Sats 6.13 Minsta kvadratlösningar till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ är desamma som lösningarna till

$$\underbrace{A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}}_{\text{kallas normalekv. till } A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

[Vi hoppar över beviset, som är konsekvens av formel för ort. proj.]

Ex. Hitta en minsta-kvadratlösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

OBS: 3 ekv. och 2 okände har oftast ingen lösning.
här: rang $A = 2$, $\mathbf{b} \notin \text{Col}(A)$ eftersom $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}.$$ ← alltid en symmetrisk $n \times n$-matris.

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

utökade matris till normalekv.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 14 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ dvs } \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

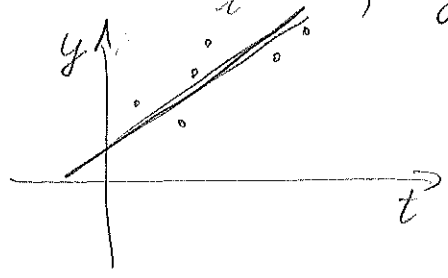
<u>Test</u>: $A\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad b - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Felet är: $\|b - A\hat{x}\| = \underbrace{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}}_{\text{summa av kvadrater är minimerad}} = \sqrt{6}$.

Hur uppstår minsta-kvadrat problem?

<u>Ex.</u> Säg att du har mätdata $(t_1, y_1), \dots, (t_n y_n)$

T.ex. t_i tid, y_i mätdata vid tid t_i.



vi skulle vilja hitta det linjära sambandet som passar mätdata bäst: heter <u>linjär regression</u>

Vi vill alltså ha en linje $y = kt + m$

vi vill lösa: $\begin{cases} y_1 = kt_1 + m \\ \vdots \\ y_n = kt_n + m \end{cases}$ $\quad k, m$ okände

går inte att lösa! men $A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = y$ där $A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{bmatrix}$

och $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ har MKv-lösning:

$$A^T A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = A^T y.$$

(7.1) Diagonalisering av kvadratiska matriser

Def. En matris A är symmetrisk om $A^T = A$.
OBS: då måste A vara en $n \times n$-matris där $a_{ji} = a_{ij}$.

Ex. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 4 \\ -8 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

Sats 7.1. Om A är symmetrisk, så är egenvektorer som hör till olika egenvärden ortogonala.

Bevis: Antag att $A v_1 = \lambda_1 v_1$ och $A v_2 = \lambda_2 v_2$ där $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vi vill visa att $v_1 \cdot v_2 = 0$.

$$\lambda_1 v_1 \cdot v_2 = (\lambda v_1)^T v_2 = (A v_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 \overset{A \text{ symm.}}{=}$$

$$= v_1^T A v_2 = v_1 \cdot (A v_2) = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 v_1 \cdot v_2.$$

Så $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v_1 \cdot v_2 = 0 \implies v_1 \cdot v_2 = 0.$ klart!

Def. En $n \times n$-matris A är ortogonall diagonaliserbar om det finns en diagonalmatris D och en $n \times n$ ON-matris P sådana att $A = PDP^T$.

<u>OBS.</u> P kvadratisk ON-matris $\iff \boxed{P^T = P^{-1}}$

Påståendet: om A är OG-diagonaliserbar så är A symmetrisk.

Varför? eftersom $A = PDP^T$. Då är

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = P D P^T = A.$$

Åt andra hållet är det svårare, men vi har

Sats 7.2 A symmetrisk $\Longleftrightarrow$ A OG-diag. bar.

Så: om A är symmetrisk vet vi direkt att vi kan diagonalisera den.

OBS: Om A är symmetrisk gäller också att

- $\det(A-\lambda I)$ faktoriserar helt i reella faktorer $(\lambda_j - \lambda)$ (inga komplexa rötter!)
- dim. för egenrum = alg. mult. av egenvärdet

[Vi hoppar över spektraldekomposition].

NE): INTE I FL.

Ex. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4+\lambda & 4+\lambda & \overbrace{1-(\lambda+3)^2}^{(1-\lambda-3)(1+\lambda+3)} \\ 0 & -4-\lambda & 0 & 4+\lambda \\ 0 & 0 & -4-\lambda & 4+\lambda \\ 1 & 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4+\lambda)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -\lambda-2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(4+\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3-\lambda \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-\lambda)(4+\lambda)^3 = \lambda(4+\lambda)^3$$

$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4$ (mult. 3)

INTE I FÖRELÄSNING!

$\lambda_1 = 0$:

$$A - 0\cdot I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

red.

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ är lösning, vi kan ta $v_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\|x_1\|^2 = 4$

$\lambda_2 = -4$:

$$A + 4\cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dvs. $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$, x_2, x_3, x_4 fria

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ utgör en bas, men inte en OG-bas (t.ex. $x_2 \circ x_3 = 1$)

GS-proces: $x_2 \circ x_2 = 2$, $x_2 \circ x_3 = 1$

$v_2 = x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_3 - \hat{x}_3 = x_3 - \frac{x_3 \circ v_2}{v_2 \circ v_2} v_2 =$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vi kan ta: $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\quad v_3 \circ v_3 = 1+1+4 = 6$,

$x_4 \circ v_2 = 1$, $x_4 \circ v_3 = 1$

$$x_4 - \hat{x}_4 = x_4 - \frac{1}{2} v_2 - \frac{1}{6} v_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

vi tar $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $v_4 \circ v_4 = 1+1+1+3 = 12$

Så: $\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\}$ är ON-bas

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/6 \\ 1/2 & 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/6 \\ 1/2 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ex. Diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 13 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 18-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13-\lambda & -5 & 4 \\ 0 & -5 & 13-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (18-\lambda) \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 & 4 \\ -5 & 13-\lambda & 4 \\ 4 & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

1:a rad

$$= (18-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & -18+\lambda & -\frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{17}{4}\lambda - 9 \\ 0 & 18-\lambda & -\frac{5}{4}\lambda + 9 \\ \boxed{4} & 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

utveckling efter 3:e rad

$R_1 \to R_1 - \frac{13-\lambda}{4} R_3$

$R_2 \to R_2 + \frac{5}{4} R_3$

Ex. Diagonalisera $A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ ortogonalt.

egenvärden:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 4 \\ 0 & -4 & 5-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{matrix} R_2 \mapsto R_2 + \frac{1-\lambda}{2} R_4 \\ R_3 \mapsto R_3 + 2R_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4+\frac{(1-\lambda)(8-\lambda)}{2} \\ 0 & 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 0 & 2 & 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 & \\ 0 & 2 & 2 & 8-\lambda \\ 0 & 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^2-9\lambda}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= (9-\lambda)\cdot 2\cdot(9-\lambda)\cdot\frac{\lambda(\lambda-9)}{2} = \lambda(\lambda-9)^3.$$

$\lambda_1 = 0$ mult. 1, $\lambda_2 = 9$ mult. 3

$\lambda_1 = 0$: $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{ovan}]{\text{som}} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

allm. lösn. $\mathbf{x} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $x_4 \in \mathbb{R}$

$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ är egenvektor, $\|v_1\| = 3$.

$\lambda_2 = 9$: $A - 9\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ fri $x_2 + x_3 - \frac{x_4}{2} = 0$

allm. lösn. $\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi kan ta $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ som bas.

Problem: de är inte ortogonala (ortonormerade).

GS-processen: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ (normer, resp.: $1, \sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}$)

Vi normerar basvektorer och får:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/3 \\ 2/3 & 0 & -1/\sqrt{2} & -2/3 \\ -1/3 & 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 9 & & \\ & & 9 & \\ & & & 9 \end{bmatrix}.$$

(7.2) Kvadratiska former

Def. En kvadratisk form är en funktion
$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ där $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ och A är en symm.
$n \times n$-matris

OBS: $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ej linjär

Ex. $A = I \quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q(x_1, x_2) = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1(3x_1 - 2x_2) + x_2(-2x_1 + x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$$

Ex. 2:a grads term i Taylorutvecklingen av flervariabla funktioner är en kvadratisk form.

Ex. Vilken matris hör ihop med

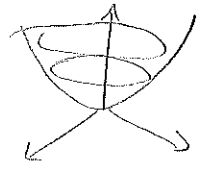
$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 3x_2x_3 - 2x_1x_3 ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ -1 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$ testa!

Om vi vill rita grafen till $Q(x_1, x_2)$ är det viktigt att känna A:s egenvärden.

Ex. $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ diagonal, $a, b > 0$

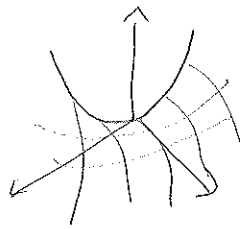
$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$



skål

nivåkurvor är alltid kägelsnitt. I detta fall, ellipser

$D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}$ $\quad Q(x_1, x_2) = ax_1^2 - bx_2^2$



sadelyta med hyperbler som nivåytor.

(kom ihåg: flervar. analys, klassificering av kritiska punkter)

Om A inte är diagonal, måste vi använda ett variabelbyte.

Ex. Beskriv grafen till $Q(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$.

Svårt att se direkt; diagonalisera $A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ istället

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = (\lambda - 11)(\lambda - 1)$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 11, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$

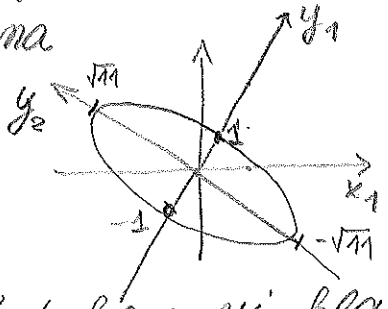
$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \boxed{A = PDP^T}$

Sätt $\boxed{x = Py}$ (då är P basbytesmatris från y-koord. till x-koord., dvs från $\{v_1, v_2\}$ till $\{e_1, e_2\}$)

$\iff y = P^{-1}x = P^T x$

$Q(x) = x^T A x = \underbrace{x^T P}_{= y^T} D \underbrace{P^T x}_{= y} = y^T D y = y_1^2 + 11y_2^2$

Dvs grafen är en skål; kolonnerna i P ger de nya axlarna



$Q(x_1, x_2) = 1$

Allmänt kan vi klassificera kvadr. former genom deras egenvärden:

Def. $Q(x)$ är

(a) positivt definitom $Q(x) > 0$ när $x \neq 0$
(ekv.: alla egenvärden är > 0)

(b) negativt definit om $Q(x) < 0$ när $x \neq 0$
(ekv.: alla ev. är < 0)

(c) indefinit om den har både positiva och negativa värden.
(dvs. det finns både pos. och negativa ev.)

(d) pos./neg. semidefinit om $Q(x) \geq 0$, resp. $Q(x) \leq 0$ för $x \neq 0$.