MVE290 - Fouriermetoder, TM 2009/10
Inlämningsuppgifter i distributionsteori

1. Låt u vara en distribution på $\mathbb{R}$.
   (a) Om $u' = 0$, visa att u är en konstant funktion.
   Ledning: Vilka testfunktioner är derivatan av någon testfunktion?
   (b) Anta att u i distributionsmening uppfyller differentialekvationen $\sum_{j=0}^{m} a_j u^{(j)} = 0$, där koefficienterna a_j är reella eller komplexa tal och $a_m \neq 0$. Visa att u är en funktion som löser ekvationen i vanlig mening.
   Ledning: Jämför med hur man löser ekvationen i vanlig mening. Man kan börja med fallet $m = 1$.
   (c) Visa att ekvationen $\sum_{j=0}^{m} a_j u^j = f$ har distributionslösningar för varje distribution f.

2. a) Övning 9.2.7 i Folland.
   b) Övning 9.2.10 i Folland.
   c) Bestäm α så att distributionen $x_1\sigma_r/r^\alpha$ har ett svagt gränsvärde då $r \to 0$, i 1, 2 och n dimensioner. Vad blir gränsvärdet? Samma sak för $x_1x_2\sigma_r/r^\alpha$ i två dimensioner. Här är σ_r ytmåttet på sfären $|x| = r$, som i dimension 1 tolkas som $\delta(x - r) + \delta(x + r)$.

3. Övning 9.3.1 i Folland.

4. a) Övning 9.3.4a i Folland.
   b) Övning 9.3.5 i Folland.
   c) Visa att man kan bestämma $c(\varepsilon)$ så att

$$\frac{|x|}{x^2+\varepsilon^2} - c(\varepsilon)\delta$$

   konvergerar svagt mot en distribution då $\varepsilon \to 0^+$. (Vilken är denna distribution?)
   Ledning: Dela upp $\int \phi(x)|x|/(x^2+\varepsilon^2)\,dx$ i integraler över $|x| < 1$ och $|x| > 1$ och subtrahera $\phi(0)$ från $\phi(x)$ i den första integralen.

5. a) Övning 9.3.14 i Folland.
   b) Verifiera dessutom att 9.3.14b också går att lösa med formeln (9.20). Gör också variabeltransformationen $y = x^2$ i integralen i 9.3.14a och jämför med 9.3.14c; observera att denna helt inkorrekta och omotiverade manöver faktiskt ger rätt resultat.
   c) Övning 9.3.9 i Folland i fallet $k = 1$.

6. a) Övning 9.4.5 i Folland.
   b) Bestäm lösningen till Schrödingerekvationen i 9.4.5c då $n = 1$ och $f(x) = e^{-x^2}$.

7. Övningarna 9.4.9,10,11 i Folland.

8. Övningarna 9.4.12,13 i Folland.

9. Övningarna 9.5.3,4,5 i Folland.

10. Bestäm de svaga gränsvärdena av följande distributioner på $\mathbb{R}$, där x är variabeln och $t \to \infty$:

$$a) \quad t^2 x \cos tx \qquad\qquad b) \quad t^2|x| \cos tx$$
$$c) \quad \frac{\sin tx}{x} \qquad\qquad d) \quad te^{itx} \log|x|.$$

Ledning: Partialintegration. I c) kan man börja med att ta en testfunktion som är konstant i en omgivning av 0. Från en godtycklig testfunktion subtraherar man sen en lämplig sådan funktion.

11. a) Låt u vara karakteristiska funktionen för enhetskivan i $\mathbb{R}^2$. Bestäm $x\partial u/\partial x + y\partial u/\partial y$.
b) Bestäm Δu då $u = e^{a|x|}/|x|$ i $\mathbb{R}^3$ och $a \in \mathbb{C}$.
Ledning: Greens formel.
c) Bestäm Δu då $u = \sin|x|/|x|$ i $\mathbb{R}^3$.

12. a) Bestäm en faltningsinvers till karakteristiska funktionen för intervallet $[0, a]$ på $\mathbb{R}$, betecknad f_a. Här är $a > 0$.
Ledning: För Heavisidefunktionen gäller $H * \delta' = \delta$, så att $f_a = H * \delta' * f_a = H * f_a' = H * (\delta - \delta_a)$, där δ_a becetcknar distributionenen $\delta(x - a)$. Invertera varje faktor i det sista uttrycket här; försök med en geometrisk serieutveckling för den andra faktorn.
b) Lös ekvationerna $f_a * u = f_b$, där $b > 0$, och $f_a * u = e^x$.

13. a) Visa följande:
Lemma. Om $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ och $\phi(0) = 0$, så tillhör $\phi(x)/x$ också C_0^∞.
Ledning: Man kan antingen skriva ϕ som integralen av sin derivata från 0 till x och transformera till en integral över $[0,1]$, eller använda Fouriertransformer.
b) Bestäm alla distributioner u på $\mathbb{R}$ som uppfyller $xu = 0$.
Ledning: Fixera en testfunktion ϕ_0 med $\phi_0(0) = 1$. Från en given testfunktion kan man sen subtrahera en lämplig multipel av ϕ_0, för att kunna använda lemmat.
c) Lös ekvationen $xu = f$, där $f = \delta$ eller $f = \delta^{(j)}$ för $j = 1, 2, ...$, t ex med hjälp av Fouriertransformer.

14. Definiera distributionen X_+^{-1}, även kallad F.P. X_+^{-1}, som derivatan av $H(x)\log x$, såsom i övning 9.3.12 i Folland.
a) Visa att för varje testfunktion ϕ

$$X_+^{-1}[\phi] = \int_0^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x}\,dx.$$

b) Visa att X_+^{-1} också kan fås som det svaga gränsvärdet av $X_+^{\varepsilon-1} - c(\varepsilon)\delta_0$ då $\varepsilon \to 0^+$, om $c(\varepsilon)$ bestäms lämpligt.

c) Vad blir produkten xX_+^{-1}? Vad kan man härav säga om Fouriertransformen av X_+^{-1}? (Jämför övning 9.4.10.)

d) (Frivilligt) Använd b) och övning 9.4.12 för att bestämma Fouriertransformen av X_+^{-1}.

15. Den 2π-periodiska funktionen $\cot\frac{x}{2}$ definierar en 2π-periodisk distribution u om man tar dess principalvärde vid singulariteterna, alltså i punkterna $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Om ϕ är en testfunktion, innebär detta att

$$u[\phi] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-2\pi n|>\varepsilon\,\forall n} \cot\frac{x}{2}\,\phi(x)\,dx.$$

Utveckla u i Fourierserie.
Ledning: Hitta en primitiv distribution (funktion) till u och sök dess Fourierutveckling i tabell.

16. a) Låt z vara ett komplext tal med positiv imaginärdel. Bestäm Fouriertransformen av funktionen

$$f_z(x) = (x^2 - z^2)^{-1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Övning 9.4.15 i Folland.
c) Använd övningen i b) för att beräkna den periodiska distributionen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_z(x+n)$ och utveckla den i Fourierserie.