MVE290 - Fouriermetoder, TM2 2010/11
Inlämningsuppgifter i distributionsteori

I vissa uppgifter används begreppet *karakteristiska funktionen* för en mängd E. Det betyder den funktion χ_E som ges av att $\chi_E(x)$ är 1 om $x \in E$, annars 0. Sålunda är Heavisidefunktionen $H(x)$ den karakteristiska funktionen för positiva halvaxeln.

Observera tryckfelen på sidorna 333 och 334 i Follands bok:
alla f i formlerna skall vara F.

1. (a) Låt χ_A, χ_B och χ_C beteckna de karakteristiska funktionerna för nedanstående mängder i $\mathbb{R}^2$ och betrakta dem som distributioner i planet. Bestäm distributionsderivatorna

$$\partial\chi_A/\partial x_1, \qquad \partial\chi_B/\partial x_1 \qquad \text{och} \qquad \partial\chi_C/\partial x_1$$

samt andraderivatorna $\partial^2\chi_A/\partial x_1\partial x_2$ och $\partial^2\chi_B/\partial x_1\partial x_2$.
Här är
$A = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0,\ x_2 < 0\}$
$B = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 < 0\}$
$C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

(b) Efter en enkel variabeltransformation kan vågekvationen i planet skrivas $\partial^2 u/\partial x_1\partial x_2$. Det är enkelt och välkänt att den allmänna lösningen till denna ekvation är $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$, där f och g är godtyckliga deriverbara funktioner. Men i distributionsmening finns ytterligare lösningar: En distribution v i planet säges vara oberoende av x_2 om den ges av en distribution v_1 på $\mathbb{R}$ genom att för varje testfunktion ϕ i planet

$$v[\phi] = v_1\left[\int \phi(x_1, x_2)\, dx_2\right].$$

Här menar vi att v_1 får verka på den 1-dimensionella testfunktionen $x_1 \mapsto \int \phi(x_1, x_2)\, dx_2$. Visa att en sådan distribution satisfierar ekvationen $\partial^2 u/\partial x_1 \partial x_2$. I detta resonemang kan man förstås låta x_1 och x_2 byta roller, och i själva verket ges den allmänna distributionslösningen av en summa av två funktioner som är oberoende av x_1 resp. x_2 (detta behöver ej visas).

2. Anta $c > 0$. Om g är en lämplig funktion på $\mathbb{R}$, definierar $g(x - ct)$ en funktion och därmed en distribution u i x, t-planet. För en godtycklig testfunktion ϕ är då

$$u[\phi] = \int \int g(x - ct)\phi(x, t)\, dxdt.$$

(a) Gör variabelbytet $y = x - ct$, $z = x + ct$ i denna integral, och skriv det erhållna uttrycket som en itererad integral där man först (innerst) integrerar i z.
(b) Anta nu bara att g är en distribution på $\mathbb{R}$. Ange hur den itererade integralen från (a) på ett naturligt sätt leder till en definition av en tvådimensionell *distribution* $g(x - ct)$, även kallad u.
(c) Om g är en funktion som i (a) och dessutom deriverbar, uppfyller $g(x - ct)$ trivialt vågekvationen $u_{tt} - c^2 u_{xx}$. Visa att också distributionen u i (b) uppfyller vågekvationen.
Ledning: Verifiera först att det för en godtycklig testfunktion gäller att visa att $u[\phi_{tt} - c^2\phi_{xx}]$ är noll. Detta uttryck stoppas in i definitionen av u i (b). Använd sen kedjeregeln för att skriva om $\phi_{tt} - c^2\phi_{xx}$ som derivator med avseende på y och z. Härled därav det önskade resultatet.

3. (a) Låt ϕ vara en testfunktion på $\mathbb{R}$. Man vill avgöra när ϕ är derivatan av någon testfunktion ψ, på följande sätt.

Anta först att $\phi = \psi'$ för en testfunktion ψ. Då är ψ en primitiv funktion till ϕ och ges av $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt + C$. Visa att konstanten C måste vara 0 och att $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,dt = 0$. Visa sen omvänt att om $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,dt = 0$ så är ϕ derivatan av en testfunktion.

(b) Använd (a) för att visa att om en distribution u på $\mathbb{R}$ uppfyller $u' = 0$, så är u en konstant funktion, dvs. u ges av $u[\phi] = \int k\phi(x)\,dx$ för någon konstant k.
Ledning: Enligt definitionen av distributionsderivata innebär $u' = 0$ att $u(\psi') = 0$ för alla testfunktioner ψ. Fixera en testfunktion ϕ_0 med $\int \phi_0(t)\,dt = 1$ och visa med hjälp av (a) att varje ϕ kan skrivas $\phi = c\phi_0 + \psi'$ för någon konstant c och någon testfunktion ψ. Vad blir c? Tag nu u av båda leden i denna likhet.

4. (a) Funktionen $F_R(x) = R \sin Rx$ får stora värden då $R \to \infty$, och konvergerar inte punktvis. Visa att $F_R(x)$, betraktad som distribution, ändå konvergerar svagt mot någon distribution då $R \to \infty$. Detta är en effekt av sinusfunktionens svängningar. Vilken är gränsdistributionen?
Ledning: Partialintegrationer.

   (b) Samma uppgift för $H(x)R \sin Rx$, där H är Heavisidefunktionen.

   (c) Samma problem för $\frac{\sin Rx}{x}$.
Ledning: Partialintegrera genom att ta en primitiv funktion till $\sin Rx/x$ och derivera testfunktionen. Utnyttja att $\int_0^M \sin t/t\,dt \to \pi/2$ då $M \to \infty$.

5. (a) Betrakta för $r > 0$ distributionen u_r på $\mathbb{R}$ definierad av

$$u_r[\phi] = r^{-3} \int_{-r}^{r} (\phi(x) - \phi(0))\,dx,$$

där ϕ är en testfunktion. Visa att u_r har ett svagt gränsvärde u då $r \to 0$, och att distributionen u ges av att $u[\phi]$ är en multipel av $\phi''(0)$. Vilken multipel får man?
Ledning: Taylorutveckla.
(b) Gör motsvarande i planet, med

$$u_r[\phi] = r^{-4} \int_{x^2+y^2<r^2} (\phi(x,y) - \phi(0,0))\, dxdy.$$

Visa att man som gränsvärde här får en multipel (vilken?) av Laplaceoperatorn, $\Delta\phi(0)$.
(c) Hur ser detta ut i n dimensioner?

6. (a) Låt a vara ett komplext tal. Funktionen $u(x) = \frac{e^{a|x|}}{|x|}$ är en distribution i $\mathbb{R}^3$, och u har kontinuerliga derivator utom i origo. Bestäm distributionen Δu.
Ledning: Man kan använda Greens formel, lämpligen i ett område av typ $\{\varepsilon < |x| < R\}$ med ett litet ε och ett stort R.
(b) Bestäm analogt Δu då $u = \frac{\sin|x|}{|x|}$ i $\mathbb{R}^3$.

7. (a) Den lokalt integrerbara funktionen $F_s(x) = \frac{x}{x^2+s}$, där $s > 0$, konvergerar då $s \to 0$ punktvis mot $1/x$, som inte är integrerbar nära origo. Funktionen $1/x$ görs till en distribution kallad X^{-1} eller P.V. $1/x$ genom att man tar principalvärdet av en integral. Se sidan 324 i Folland, speciellt formel (9.17). Visa att F_s, betraktad som distribution, konvergerar svagt mot X^{-1} då $s \to 0$.
Ledning: Se ledningen till Follands övning 9.3.4(a).
(b) Rita graferna av F_s och dess derivata F_s' för ett litet värde på s. Vad liknar derivatans graf?
(c) Använd (a) för att beräkna produkten xX^{-1}.

8. (a) Bestäm Fouriertransformen av distributionen X^{-1} (se

Folland, sidan 324) genom att utnyttja att den enligt del (a) av föregående uppgift är svaga gränsvärdet av Fouriertransformen av $F_s(x) = \frac{x}{x^2+s}$ då $s \to 0$. För att bestämma $\widehat{F_s}$ observerar man att effekten av faktorn x är en derivering på Fouriersidan.
(b) Använd resultatet för att bestämma Fouriertransformen av Heavisidefunktionen $H(x)$.

9. (a) Gör Follands övning 9.3.6, dvs. visa att distributionsderivatan av $\ln|x|$ är den distribution $X^{-1} = \text{P.V. } 1/x$ som definieras på sidan 324 i Folland.
Ledning: I den integral som uppstår då $\frac{d}{dx}\ln|x|$ verkar på en testfunktion kan man partialintegrera i intervallen (ε, ∞) och $(-\infty, -\varepsilon)$. Låt sen $\varepsilon \to 0$.
(b) Beräkna dilationerna $F^{[a]}$, där $a > 0$ och F är distributionen $\ln|x|$ eller dess derivata. Se Folland, sidan 311 och övning 9.1.1. Är någon av dessa distributioner homogen av något gradtal?

10. Funktionen $-2H(x)/\sqrt{x}$ är lokalt integrerbar även vid 0 och definierar därför en distribution på $\mathbb{R}$. Dess punktvisa derivata är $H(x)x^{-3/2}$ för $x \neq 0$. Man vill bestämma dess distributionsderivata, som på sidan 327 i Folland betecknas $X_+^{-3/2}$ (specialfall av $X_+^{-\lambda}$). Visa att denna distributionsderivata ges av formeln i övning 9.3.9, i fallet $\lambda = 3/2,\ k = 1$.
Ledning. Börja med att skriva ut detta specialfall av formeln i Follands övning. I integralen som uppstår då distributionsderivatan av $-2H(x)/\sqrt{x}$ verkar på en testfunktion ϕ kan man partialintegrera, i intervallen $(\varepsilon, 1)$ och $(1, \infty)$. Som primitiv funktion till ϕ' väljer man i det förstnämnda intervallet inte ϕ utan $\phi - \phi(0)$. Sen får $\varepsilon \to 0$.

11. För $\lambda > 1$ är funktionen $x^{-\lambda}H(x)$ inte integrabel vid origo. Men den görs till en distribution $X_+^{-\lambda}$ genom Follands formler (9.21-22), förutsatt att λ inte är heltal. Gör övning 9.4.12 i Folland, dvs. bestäm Fouriertransformen av $X_+^{-\lambda}$ för sådana värden på λ.
    Ledning: Enligt ledningen till Follands övning börjar man med att räkna ut Fouriertransformen i fallet $0 < \lambda < 1$, och det görs lämpligen med integration i komplexa planet.

12. För $\mu > 0$ definierar

$$u_\mu[\phi] = \int_0^\infty x^{\mu-1}\phi(x)\, dx$$

    en distribution u_μ på $\mathbb{R}$. Då $\mu \to 0$ har denna integral för de flesta testfunktioner ϕ inget ändligt gränsvärde; verifiera detta med exempel. Därför har distributionerna u_μ inget svagt gränsvärde då $\mu \to 0$. Detta kan avhjälpas genom multiplikation med en lämplig faktor. Bestäm en kvantitet $Q(\mu)$ sådan att $Q(\mu)u_\mu[\phi]$ konvergerar då $\mu \to 0$, för alla testfunktioner ϕ, och det mot ett värde som inte alltid är 0. Detta betyder att $Q(\mu)u_\mu$ konvergerar svagt då $\mu \to 0$, mot en distribution som inte är nolldistributionen. Ange också vilken denna gränsdistribution är.
    Ledning: För att gissa vad $Q(\mu)$ skall vara, ersätt först $\phi(x)$ i integralen med karakteristiska funktionen för ett intervall $(0, a)$. Sen kan man verifiera konvergensen genom att dela upp den givna integralen i integraler över $(0, a)$ och (a, ∞) och skriva ϕ som $\phi(x) = (\phi(x) - \phi(0)) + \phi(0)$ i den första av dem. Detta ger tre integraler, som alla konvergerar då $\mu \to 0$.

13. (a) Visa följande

Lemma. Om $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ och $\phi(0) = 0$, så tillhör $\phi(x)/x$ också $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
Ledning: Antingen skriver man ϕ som integralen av sin derivata från 0 till x och transformerar till en integral över $[0, 1]$. Eller också observerar man att Fouriertransformen $\hat{\phi}$ har integral 0, så att $\hat{\phi}$ har en primitiv funktion i Schwartzklassen $\mathcal{S}$ och alltså är derivatan av en funktion i $\mathcal{S}$.
(b) Bestäm alla distributioner u på $\mathbb{R}$ som uppfyller $xu = 0$.
Ledning: Verifiera först att $xu = 0$ innebär att $u[x\psi] = 0$ för alla testfunktioner ψ. Fixera därefter en testfunktion ϕ_0 med $\phi_0(0) = 1$. Från en given testfunktion kan man subtrahera en multipel av ϕ_0 för att kunna använda lemmat.

14. (a) Gör övning 9.4.15 i Folland, som innebär en enkel generalisering av Poissons summationsformel.
(b) Använd (a) för att beräkna

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^2 - \omega^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

där ω är ett komplext tal med positiv imaginärdel. Då behöver man bestämma Fouriertransformen av funktionen $h(x) = (x^2 - \omega^2)^{-1}$, vilket kan göras t.ex. med integration i komplexa planet. Resultatet blir en serie som är Fourierserien för den 1-periodiska funktionen f. Summera också denna serie.

15. Övning 9.5.3 i Folland.

16. Övning 9.3.1 i Folland. Observera tryckfelen: i definitionen av $\chi(x)$ (den första formeln i övningen) skall $(1 - t)$ i exponenterna i båda integralerna vara $(2\pi - t)$. Substitutionen som nämns i del a skall vara $s = 2\pi - t$.
Ledning till del c: Tillämpa först formeln i del b på $f(x) =$

$e^{i\ell x}$. Utgå sen från kvantiteten $F[\chi(x)e^{-ikx}]$ och ersätt F med dess Fourierserie.

17. Den 2π-periodiska funktionen $\cot \frac{x}{2}$ definierar en 2π-periodisk distribution u om man tar dess principalvärde vid singulariteterna, alltså vid punkterna $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. För en testfunktion ϕ innebär detta att

$$u[\phi] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x-2\pi n|>\varepsilon,\, n\in\mathbb{Z}} \cot \frac{x}{2}\, \phi(x)\, dx.$$

(a) Verifiera att detta gränsvärde existerar för varje testfunktion ϕ, så att man får en distribution.
Ledning: Utnyttja vid punkten 0 att cotangensfunktionen är udda, genom att subtrahera $\phi(0)$ från ϕ i t.ex. intervallet $[-1, 1]$. Jämför med definitionen av P.V. $1/x$ i Folland, sidan 324. Motsvarande i andra punkter $2\pi n$.
(b) Enligt Theorem 9.6 på sidan 322 i Folland kan varje periodisk distribution utvecklas i Fourierserie. Bestäm utvecklingen av u.
Ledning: Visa att u är distributionsderivatan av funktionen $2 \ln |\sin \frac{x}{2}|$, vars Fourierserie finns i tabell. Derivera termvis.