Binomiska ekvationer

Seidon Alsaody

MVE335

Detta är ett tillägg till kurskompendiet och behandlar lösningar till binomiska ekvationer, det vill säga komplexa lösningar till ekvationer på formen

$$z^n = a$$

där n är ett naturligt tal och a är ett (känt) komplext tal. Vi går igenom exempel som innehåller allt väsentligt man behöver. Låt oss därför lösa ekvationen

$$z^5 = 32.$$

Potenser av komplexa tal är svåra att räkna ut om talet är på formen $a+bi$, men tack vare de Moivres formel är det lätt om man har talet på polär form. Så vi börjar med att skriva upp z och 32 på polär form. Talet 32 har belopp 32 och argument 0, eftersom talet ligger på den reella axeln så att vinkeln 0 bildas mellan talets vektor och den axeln. Så

$$32 = 32(\cos 0 + i \sin 0).$$

Detta kan man också räkna ut genom att bryta ut beloppet:

$$32 = 32 + 0i = 32(1 + 0i) = 32(\cos 0 + i \sin 0)$$

eftersom $\cos 0 = 0$ och $\sin 0 = 0$. För z, som ju är obekant, får vi ha obekanta belopp och argument:

$$z = r(\cos v + i \sin v).$$

Ekvationen $z^5 = 32$ säger nu att

$$(r(\cos v + i \sin v))^5 = 32(\cos 0 + i \sin 0).$$

Vänsterledet kan vi förenkla med de Moivres formel, så ekvationen blir

$$r^5(\cos(5v) + i \sin(5v)) = 32(\cos 0 + i \sin 0).$$

För att likhet ska gälla måste vänsterledet och högerledet ge samma punkt i det komplexa planet. Då måste till att börja med deras belopp vara lika, så

$$r^5 = 32$$

vilket ger $r = 2$ eftersom beloppet är ett (positivt) reellt tal. Dessutom måste vinklarna (argumenten) stämma, så att

$$\cos(5v) = \cos 0 \text{ och } \sin(5v) = \sin 0.$$

Den första ekvationen ger

$$5v = \pm 0 + 2\pi n$$

och den andra

$$5v = 0 + 2\pi n \text{ eller } 5v = \pi - 0 + 2\pi n$$

så den enda möjligheten som uppfyller *båda* ekvationer är

$$5v = 0 + 2\pi n$$

vilket ger

$$v = 0 + \frac{2}{5}\pi n.$$

Här är n ett godtyckligt heltal. Vi ser att om vi tar $n = 5$ så får vi samma cos- och sin-värden som för $n = 0$, eftersom

$$0 + 5 \cdot \frac{2}{5}\pi = 2\pi$$

så skillnaden är ett varv. Samma sker för $n = 6$ jämfört med $n = 1$ osv, så vi får 5 lösningar som återkommer. Därför räcker det att ta med $n = 0, 1, 2, 3, 4$ så har vi täckt alla lösningar. Samlar vi ihop all denna information får vi följande 5 lösningar (alltid lika många som ekvationens grad):

$$z_1 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2,$$

$$z_2 = 2(\cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi),$$

$$z_3 = 2(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi),$$

$$z_4 = 2(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi),$$

$$z_5 = 2(\cos \frac{8}{5}\pi + i \sin \frac{8}{5}\pi).$$

Dessa svarar mot att n är 0, 1, 2, 3 eller 4.

Metoden är alltså:

1. Skriv om på polär form.
2. Förenkla med de Moivres formel.
3. Räkna ut beloppet, som är ett entydigt bestämt positivt reellt tal.
4. Använd trigonometri för att bestämma argumentet. Tänk på att det ska vara lika många lösningar som ekvationens grad.

Utrustade med detta kan vi lösa $z^3 = -3 + 3i$. Vi använder grader; det är viktigt att känna sig hemma med både radianer och grader eftersom båda används i olika sammanhang.

1. Beloppet av $-3+3i$ är $\sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, så

$$-3+3i = 3\sqrt{2}(-\frac{3}{3\sqrt{2}}+i\frac{3}{3\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 3\sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°).$$

   Som vanligt sätter vi

$$z = r(\cos v + i\sin v).$$

2. Med de Moivres formel får vi $z^3 = r^3(\cos 3v+i\sin 3v)$, vilket för ekvationen ger

$$r^3(\cos 3v + i\sin 3v) = 3\sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°).$$

3. Beloppet uppfyller $r^3 = 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$, dvs r är tredjeroten ur $\sqrt{18}$, dvs $r = \sqrt[6]{18}$.

4. Vi har

$$3v = 135° + n360°$$

   vilket ger

$$v = 45° + n120°$$

   och ekvationen har grad 3, så lösningarna kommer med ett tredjedels varvs intervall: vi tar med $n = 0, 1, 2$ och får alltså de tre möjliga vinklarna 45°, 165° och 285°.

Svaret blir:

$$z_1 = \sqrt[6]{18}(\cos 45° + i\sin 45°) = \sqrt[6]{18}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$z_2 = \sqrt[6]{18}(\cos 165° + i\sin 165°),$$

$$z_3 = \sqrt[6]{18}(\cos 285° + i\sin 285°).$$

Så till ekvationen $z^n = a$ har alla lösningar samma belopp ($n$te roten ur beloppet av a), och de sitter jämnt utplacerade runt origo, med vinkeln $360°/n$ emellan sig. För att få exakta siffror på detta får man räkna som ovan.

Man ska alltid förenkla sitt svar så gott det går. Får man vinklar vars cos- och sin-värden man kan räkna ut exakt (t ex 30° eller $\pi/2$) ska man göra det och svara på kartesisk form ($a + bi$). Är det inte så kan man lämna kvar de trigonometriska uttrycken; det är bättre att ha ett exakt värde som är geometriskt lättförståeligt än att med miniräknare/formelsamling skaffa fram ett avrundat värde som för läsaren framstår som mystiskt.