Några uppgifter på komplexa tal

1. Polynomet $z^4 - 2\,z^3 - 2\,z + 15$ har nollstället $z = 2 - i$. Bestäm samtliga nollställen till polynomet.

2. (a) Beräkna $\dfrac{(1 + j\sqrt{3})^9}{(\sqrt{3} - j)^{12}}$. Svara på formen $x + jy$.

   (b) Lös den binomiska ekvationen $z^4 = -16$.

3. Polynomet $P(z) = -48 + 4\,z - 8\,z^2 + z^3 + z^4$ innehåller faktorn $z + 2i$. Skriv $P(z)$ som en produkt av förstagradsfaktorer.

4. (a) Formulera de Moivre's formel.

   (b) Skriv det komplexa talet $-1 + 3i$ på polär form.

   (c) Det komplexa talet z_1 har belopp 3 och argument $3\pi/4$ och z_2 har belopp 2 och argument π. Ange belopp och argument för $z_1 z_2$ och z_1/z_2, samt ange deras läge i det komplexa planet.

   (d) Redogör för hur man löser ekvationen $z^n = a$, där a är ett givet komplext tal.

5. Polynomet $p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$ har ett nollställe $z = 1 - i$. Bestäm samtliga nollställen.

6. (a) Låt $z = -1 + i$ och $w = 1 - 2i$. Beräkna $z - w$ och $\dfrac{z}{w}$. Svara på formen $x + iy$ och för den sistnämnda kvoten även på polär form.

   (b) Ange en reell (utan i) fjärdegradsekvation som har en komplex rot $i\sqrt{3} - 1$ och två reella rötter 1 och -1. Svara på formen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

   (c) Beräkna z^{-7} om z har belopp 1 och argument $3\pi/4$. Svara på formen $x + iy$.

7. (a) Låt $z = 7 + 3i$ och $w = 5 - 2i$. Beräkna $z - w$ och $\dfrac{z}{w}$. Svara på formen $x + iy$ och för den sistnämnda kvoten även på polär form.

   (b) Ange en reell (utan i) fjärdegradsekvation som har en komplex rot $i\sqrt{2} - 3$ och två reella rötter 0 och -1. Svara på formen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

   (c) Beräkna $z^{-5} - z^5$ om z har belopp 1 och argument $\pi/4$. Svara på formen $x + iy$.

8. (a) Låt $z = 4 - 3i$ och $w = 2 + i$. Beräkna $z - w$ och $\dfrac{z + w}{w}$. Svara på formen $x + iy$ och för den sistnämnda kvoten även på polär form.

   (b) Ange en reell (utan i) fjärdegradsekvation som har rötter $1 - i\sqrt{3}$ och $\pm\sqrt{2}$. Svara på formen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

   (c) Beräkna z^9 där $z = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$. Svara på formen $x + iy$.

9. (a) Låt $z = 1 - 2i$ och $w = 2 - i$. Beräkna $z - w$ och $1/(1/z + 1/w)$. Svara på formen $x + iy$.

(b) Beräkna z^{15} där $z = -\sqrt{3} + i$. Svara på formen $x + iy$.

10. (a) Låt $z = 1 + i\sqrt{3}$ och $w = 2\,e^{\frac{-i\pi}{3}}$. Beräkna $z + w$ och z/w. Svara på formen $x + iy$.

(b) Beräkna z^{10} där $z = (-1 + i)/\sqrt{2}$. Svara på formen $x + iy$.

11. (a) Låt $z = i - 1$ och $w = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{-i\pi}{4}}$. Beräkna $z - w$ och $z \cdot w$. Svara på formen $x + iy$.

(b) Givet att ekvationen $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$ har en rot $x = i$, bestäm samtliga rötter till ekvationen.

12. Lös den binomiska ekvationen $z^5 = -\sqrt{3} + i$.

Svar

1. Enligt faktorsatsen är polynomet delbart med $(z-2+i)(z-2-i) = z^2 - 4z + 5$ och efter division får vi kvar kvoten $z^2 + 2z + 3$ vilket ger nollställena $2 \pm i, -1 \pm i\sqrt{2}$.

2. (a) $\dfrac{(1 + j\sqrt{3})^9}{(\sqrt{3} - j)^{12}} = \dfrac{(2e^{i\pi/3})^9}{(2e^{-i\pi/6})^{12}} = \dfrac{2^9 e^{i3\pi}}{2^{12} e^{-i2\pi}} = -1/8.$

   (b) $r^4 e^{i4\phi} = 16e^{i(\pi + n2\pi)}$, dvs $r = 2$, $\phi = \pi/4 + n\pi/2$. Alltså $z = 2e^{i(\pi/4 + n\pi/2)}$, $n = 0, 1, 2, 3$ eller $z = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$.

3. Även $z - 2i$ är ju faktor så att man kan dividera $P(z)$ med $z^2 + 4$. Detta ger kvoten $z^2 + z - 12$ som har nollställen $z = 3$, $z = -4$. Faktorisering $P(z) = (z-3)(z+4)(z-2i)(z+2i)$.

4. (a) $(\cos\Theta + i\sin\Theta)^n = \cos n\Theta + i\sin n\Theta$

   (b) $-1 + 3i = \sqrt{10}e^{i(\arctan(-3)+\pi)}$

   (c) $z_1 z_2 = 6e^{i7\pi/4}$, $z_1/z_2 = 3/2e^{-i\pi/4}$. Båda ligger på linjen $y = -x$ i fjärde kvadranten, på avståndet 6 respektive 1.5 från origo.

   (d) Vi skriver z och a på polär form och sätter in i ekvationen; $R^n e^{in\phi} = |a|\, e^{i\Theta}$. Alltså $R = \sqrt[n]{|a|}$ och $\phi = (\Theta + 2k\pi)/n = \Theta/n + k \cdot 2\pi/n$, $k = 0, \ldots, n-1$.

5. Enligt faktorsatsen är polynomet delbart med $(z-1+i)(z-1-i) = z^2 - 2z + 2$ och efter division får vi kvar kvoten $z^2 + 1$ vilket ger nollställena $1 \pm i, \pm i$.

6. (a) $z - w = -1 + i - (1 - 2i) = -2 + 3i$. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{(-1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{-3-i}{5}$. Polär form $\dfrac{\sqrt{10}}{5}(\cos(\arctan(1/3) - \pi) + i\sin(\arctan(1/3) - \pi))$.

(b) $(z-(i\sqrt{3}-1))(z-(-i\sqrt{3}-1))(z-1)(z+1) = ((z-1)^2-(i\sqrt{3})^2)(z^2-1)$
$-4-2z+3z^2+2z^3+z^4$.

(c) $z^{-7} = \cos(-7\cdot 3\pi/4)+i\sin(-7\cdot 3\pi/4) = \cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4) = (-1+i)/\sqrt{2}$

7. (a) $z-w = 7+3i-(5-2i) = 2+i$. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{(7+3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = 1+i$. Polär form $\sqrt{2}\,(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))$.

(b) $(z-(i\sqrt{2}-3))(z-(-i\sqrt{2}-3))(z-0)(z+1) = ((z+3)^2-(i\sqrt{2})^2)(z^2+z)$.
$11z+17z^2+7z^3+z^4$.

(c) $z^{-5}-z^5 = \cos(-5\cdot\pi/4)+i\sin(-5\cdot\pi/4)-\cos(5\cdot\pi/4)+i\sin(5\cdot\pi/4) = (-1+i)/\sqrt{2}-(-1-i)/\sqrt{2} = i\sqrt{2}$

8. (a) $z-w = 4-3i-(2+i) = 2-4i$. $\dfrac{z+w}{w} = \dfrac{(6-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 2-2i = 2\sqrt{2}\,(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$.

(b) $(z-(-i\sqrt{3}+1))(z-(i\sqrt{3}+1))(z-0)(z+1) = ((z-1)^2-(i\sqrt{3})^2)(z^2-2) =$
$-8+4z+2z^2-2z^3+z^4$.

(c) $z^9 = (2\sqrt{2})^9\,(\cos(9\cdot\pi/3)+i\sin(9\cdot\pi/3)) = -2^{13}\sqrt{2}$

9. (a) $z-w = 1-2i-(2-i) = -1-i = \sqrt{2}(\cos(-3\pi/4)+i\sin(-3\pi/4))$. $\dfrac{zw}{z+w} = (5-5i)/6 = 2\sqrt{2}\,(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$.

(b) $z^15 = 2^{15}\,(\cos(15\cdot 5\pi/6)+i\sin(15\cdot 5\pi/6)) = 2^{18}i$

10. (a) Låt $z = 1+i\sqrt{3}$ och $w = 2\,e^{\frac{-i\pi}{3}}$. $z+w = 2$ och $z/w = \cos(\pi/3-(-\pi/3)) + i\sin(\pi/3-(-\pi/3)) = (-1+i\sqrt{3})/2$.

(b) $z^{10} = \cos(-10\cdot 3\pi/4)+i\sin(-10\cdot 3\pi/4) = \cos(-15\pi/2)+i\sin(-15\pi/2) = i$

11. (a) Låt $z = i-1$ och $w = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\frac{-i\pi}{4}}$. $z-w = (-1+i)/2$ och $z\cdot w = \cos(3\pi/4-\pi/4)+i\sin(3\pi/4-\pi/4) = i$.

(b) $6-2x+7x^2-2x^3+x^4$ har faktor $(x-i)(x+i) = x-i^2 = x^2+1$. Efter division får vi kvar x^2-2x+6 som har nollställen $1\pm i\sqrt{5}$.

12. $z = r(\cos\phi+i\sin\phi)$ ger $r^5(\cos 5\phi+i\sin 5\phi) = 2(\cos 5\pi/6+i\sin(5\pi/6)$. Vi får $r = \sqrt[5]{2}$ och $5\phi = 5\pi/6+n2\pi$, dvs $z = \sqrt[5]{2}\,(\cos(\pi/6+n\cdot 2\pi/5)+i\sin(\pi/6+n\cdot 2\pi/5))\,,\quad n = 0,1,\ldots 4$.