Deltentamen 3
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del B

2011-05-13 kl. 15.15–17.15

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Ingen! Sitter i möte med disciplinnämnden och olyckliga studenter , telefon: SMS till 0704 62 35 95 så ringer jag upp när jag kan.

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

Erhållen poäng på denna deltenta får ersätta poängen på uppgift 3 på tentamen tills kursen ges nästa läsår. Delentan rättas och bedöms öppet. Resultat meddelas i samband med undervisningen. Första granskningstillfälle i samband med undervisningen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

---

1. (a) Avgör om $y(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x$ är lösning till differentialekvationen (2p)

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y(x) = 0.$$

(b) En kropp med massan 4 kg hängs upp i en fjäder som då sträcks 98 mm. Fjäderkonstanten är alltså $k = 4g/0.098 = 400\ N/m$. Massan dras ner 8 cm från jämviktsläget och släpps sedan. Därefter får massan svänga fritt. Låt $x(t)$ vara massans avvikelse från jämviktsläget med positiva värden då fjädern förlängs. Då är $x(t)$ lösning till differentialekvationen: (3p)

$$4x''(t) + 400x(t) = 0, \quad x(0) = 0.08, \quad x'(0) = 0.$$

Bestäm $x(t)$.

(c) Om man monterar in en dämpare med dämpningskonstant 48 parallellt med fjädern och sedan startar rörelsen på samma sätt som i a) beskrivs svängningarna av differentialekvationen: (3p)

$$4x''(t) + 48x'(t) + 400x(t) = 0 \quad x(0) = 0.08, \quad x'(0) = 0.$$

Bestäm $x(t)$.

Lycka till!
Carl-Henrik Fant

Formelblad för MVE340 10/11

Trigonometri.

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$

$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{c-a}{b-a}\,(f(b) - f(a))$

Gränsvärden

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Deriveringsregler

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \qquad (kf(x))' = kf'(x) \qquad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några elementära funktioners derivator

$$D\,(x^p) = px^{p-1} \qquad D\,(e^x) = e^x \qquad D\,(e^{cx}) = ce^{cx} \qquad D\,(a^x) = a^x \ln a$$

$$D\,(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad D\,(\sin x) = \cos x \qquad D\,(\cos x) = -\sin x \qquad D\,(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Lösning till ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa med x_1 som nytt x_0, upprepa tills $|f(x_1)|$ är litet.

Integralkatalog

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \qquad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{sin^2 x}dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1 \neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$, ($m,\ c,\ k$ konstanter). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}\,(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t}\,(C_1 + C_2 t)$