Lösningsförslag till tentamensexempel 2
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del B

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: , telefon:

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 25 poäng på godkäntdelen, eller minst 5 poäng på varje uppgift. Erhållen poäng på deltentor detta läsår får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på tentamen tills kursen ges nästa läsår.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. f är funktionen som ges av $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$

(a) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x^3}$ och $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ (2p)

Lösning: Sätt in $x = -1$ för första gränsvärdet det ger att gränsvärdet är -24

För det andra gränsvärdet: Dividera alla termerna med x^3. Kvoten är $1 + 3/x - 24/x^2 - 2/x^3$ som har gränsvärdet 1 då $x \to -\infty$

(b) Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till grafen till f i den punkt på grafen där $x = 3$. (4p)

Lösning: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$, $f(3) = -20$, $f'(3) = 21$. Tangentens ekvation: $y+20 = 21(x-3)$, omskrivs till $y = 21x-83$. Normalens ekvation $y+20 = -\frac{1}{21}(x-3)$, omskrivs till $x + 21y + 417 = 0$.

(c) Bestäm ett intervall av längd högst $\frac{1}{4}$ som innehåller en positiv rot till $f(x) = 0$. (2p)

Lösning: $f(3) = -20$, $f(4) = 14$, rot i intervallet $[3, 4]$. $f(3.5) \approx -6$, $f(3.75) \approx -3$, rot i intervallet $[3.5, 3.75]$.

2. (a) Rita grafen till $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$ på intervallet $[-5, 5]$. Ange funktionens lokala extrempunkter (max och min) samt största och minsta värde på intervallet. (4p)

Lösning: $f'(x) = 3x^2+6x-24 = 0$ för $x = -4$ och $x = 2$. Lokalt maximum för $x = -4$, maxpunkt $(-4, 78)$, lokalt minimum för $x = 2$, minpunkt $(2, -30)$. $f(-5) = 68$, $f(5) = 78$, största värdet på intervallet är 78 (antas för både $x = -4$ och $x = 5$), minsta värdet är -30, antas endast för $x = 2$.

(b) Bestäm en positiv rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$ (samma som i uppgift 1). Du kan vara nöjd då $|f(x_0)| < 0.1$ (1p)

Lösning: Vi har redan ett intervall, $[3.5, 3.75]$, för roten. Med 3.5 som startvärde leder Newtons metod i två steg till $x = 3.6764$ som duger eftersom $f(3.6764) = 0.0022$.

(c) Beräkna arean mellan grafen till $f(x) = x^2 - x - 2$ och x-axeln. (3p)

Lösning: $f(x) = 0$ för $x = -1$ och $x = 2$. För x mellan -1 och 2 är $f(x) < 0$. Arean är då $\int_{-1}^{2}(0 - f(x))dx = \int_{-1}^{2}(-x^2 + x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - (-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) = 5\frac{1}{6}$

3. (a) Lös differentialekvationen $y''(t) + 289y(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2..$ (4p)

Lösning: Karakteristisk ekvation $s^2 + 289 = 0$, $s = \pm 17i$. Allmän lösning $y(t) = A\cos(17t) + B + sin(17t)$. Villkoren ger $A = 1$ och $B = \frac{2}{17}$

(b) Lös differentialekvationen $y''(t) + 16y'(t) + 289y(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$ (4p)

Lösning: Karakteristisk ekvation $s^2 + 16s + 289 = 0$, $s = -8 \pm 15i$. Allmän lösning $y(t) = e^{-8t}(A\cos(15t) + B\sin(15t))$. Villkoren ger $A = 1$ och $B = \frac{2}{3}$. Glöm inte hur man deriverar en produkt!

4. (a) Lös ekvationssystemet med hjälp av totalmatrisen. (2p)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 6 \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

Lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

z är fri variabel. Vi får lösningen

$$\begin{cases} x = \frac{12}{5} - t \\ y = -\frac{2}{5} \\ z = t \end{cases}$$

(b) Avgör om några av vektorerna $(1, 2, -3)$, $(2, 1, 1)$ och $(5, -7, -3)$ är ortogonala (vinkelräta mot varandra). (2p)

Lösning: Beräkna skalärprodukterna, om 0 så ortogonala vektorer.

(c) Bestäm alla vektorer som är vinkelräta mot vektorerna $(-2, 1, 2)$ och $(2, -1, 1)$ (2p)

Lösning: Beräkna vektorprodukten som ger en vektor ortogonal mot de två givna. Man får alla genom att multiplicera med en obestämd skalär c.

(d) Ange en ekvation för linjen som går genom punkten $(2, 1, 0)$ med riktningsvektor $(2, -1, -2)$. (2p)

Lösning: Linjens ekvation är

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 0 - 2t \end{cases}$$

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\tan(3x^2)}{x^4 - 2x^3} dx.$ (3p)

(b) Beräkna integralen $\int x^3 e^{x^2} dx.$ (3p)

7. En behållare utan lock har formen av ett rätblock med kvadratisk bottenplatta. Bottenplattan tillverkas av ett material som är tre gånger så dyrt som materialet i sidväggarna. Bestäm förhållandet mellan behållarens höjd och bottenplattans sida då behållaren har volymen Vm^3 och materialet i behållaren kostar så lite som möjligt. (6p)

8. Visa att linjen (6p)

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

är parallell med planet som går genom punkterna $(0,0,0)$, $(2,1,-2)$ och $(1,2,2)$.

Bestäm skärningspunkten mellan planet och linjen som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(1,-1,2)$.

Carl-Henrik Fant

Trigonometri.

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad \sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) \qquad \tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) \qquad \cos(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y)=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)) \qquad \sin(x)\cos(y)=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$$

Linjär interpolation

$a<c<b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\quad f(c)\approx f(a)+\dfrac{c-a}{b-a}\,(f(b)-f(a))$

Gränsvärden

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Deriveringsregler

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x) \qquad (kf(x))'=kf'(x) \qquad (f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$$

Några elementära funktioners derivator

$$D\left(x^p\right)=px^{p-1} \qquad D\left(e^x\right)=e^x \qquad D\left(e^{cx}\right)=ce^{cx} \qquad D\left(a^x\right)=a^x\ln a$$

$$D\left(\ln x\right)=\frac{1}{x} \qquad D\left(\sin x\right)=\cos x \qquad D\left(\cos x\right)=-\sin x \qquad D\left(\tan x\right)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ Normalens ekvation: $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Lösning till ekvationen $f(x)=0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa med x_1 som nytt x_0, upprepa tills $|f(x_1)|$ är litet.

Integralkatalog

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \qquad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad a\neq -1 \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x+C \qquad \int \cos x dx = \sin x+C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x+C \qquad \int \frac{1}{sin^2 x}dx = -\cot x+C$$

$$\int e^x dx = e^x+C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad 0<a\neq 1$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t)+cx'(t)+kx(t)=0$ har den allmänna lösningen $x(t)=C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}$ där s_1 och s_2 är lösningar $(s_1\neq s_2)$ till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2+cs+k=0$, $(m,\ c,\ k$ konstanter). Om $s_{1,2}=a\pm ib$ så är $x(t)=e^{at}\left(C_1\cos(bt)+C_2\sin(bt)\right)$. Om $s_1=s_2$ så är $x(t)=e^{s_1t}\left(C_1+C_2t\right)$

Vektor(kryss)produkt

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3)=(u_2v_3-u_3v_2,-(u_1v_3-u_3v_1),u_1v_2-u_2v_1)=\left(\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}\right)$$