Tentamensexempel våren 2011
MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del B

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: , telefon:

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 25 poäng på godkäntdelen, eller minst 5 poäng på varje uppgift. Erhållen poäng på deltentor detta läsår får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på tentamen tills kursen ges nästa läsår.
För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. (a) Till en funktion f har man följande värdetabell: (2p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3.8	-1.6	-0.6	-0.2	0.2	1.2	3.4

Skissa grafen och beräkna ett närmevärde till $f(2.3)$

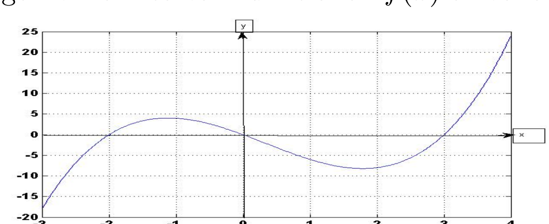
(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x-2}{5x^3-2x^2}$ (1p)

(c) Bestäm en ekvation för tangenten till grafen till $f(x) = x^3 + 3x - 2$ i den punkt på grafen där $x = 2$. (2p)

(d) Bestäm ett intervall av längd högst $\frac{1}{4}$ som innehåller en rot till $x^3+3x-2 = 0$. Ange ett närmevärde till roten. Hur stort kan felet vara? (2p)

(e) Nedanstående graf visar **derivatan** $f'(x)$. (1p)

Ange i vilka intervall funktionen $f(x)$ är växande respektive avtagande.



2. (a) Bestäm största och minsta värdet av $f(x) = x^3-3x+2$ då $-2 \le x \le 2$. Skissa grafen som stöd för din slutsats. (2p)

(b) Bestäm en rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = x^3+x^2-2x-3$. Du kan vara nöjd då $|f(x_0)| < 0.05$ (2p)

(c) Beräkna arean mellan grafen till $f(x) = 6x - x^2 - 5$ och linjen $y = 3$. (2p)

(d) Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x)^2}dx$ med hjälp av substitutionen $t = \cos x$. (2p)

3. (a) Ange allmänna lösningen till differentialekvationen $y''(t) + 10y'(t) + 9y(t) = 0$. (2p)

(b) En kropp med massan 2 kg hängs upp i en fjäder som då sträcks 81 mm. Fjäderkonstanten är alltså $k = 2g/0.081 = 242\ N/m$. Massan sätts i rörelse från jämviktsläget med en begynnelsehastighet 2 m/s nedåt. Massan får sedan svänga fritt. Låt $x(t)$ vara massans avvikelse från jämviktsläget med positiva värden då fjädern förlängs. Då är $x(t)$ lösning till differentialekvationen: (3p)

$$2x''(t) + 242x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

Bestäm $x(t)$.

(c) Om man monterar in en dämpare med dämpningskonstant 4 parallellt med fjädern och sedan startar rörelsen på samma sätt som i a) beskrivs svängningarna av differentialekvationen: (3p)

$$2x''(t) + 4x'(t) + 242x(t) = 0 \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

Bestäm $x(t)$.

4. (a) Beräkna (2p)

(b) Beräkna (2p)

(c) Beräkna (2p)

(d) Beräkna (2p)

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

(6p)

6.

(6p)

7.

(6p)

8.

Carl-Henrik Fant

Formelblad för MVE340 10/11

Trigonometri.

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\qquad$ $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\cos(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x)\sin(y) = \dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$

$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(x)\cos(y) = \dfrac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$

Linjär interpolation

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{c-a}{b-a}\left(f(b)-f(a)\right)$

Gränsvärden

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Deriveringsregler

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ $\qquad$ $(kf(x))' = kf'(x)$ $\qquad$ $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några elementära funktioners derivator

$D\left(x^p\right) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D\left(e^x\right) = e^x$ $\qquad$ $D\left(e^{cx}\right) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D\left(a^x\right) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

Tangentens ekvation: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

Lösning till ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0, beräkna: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa med x_1 som nytt x_0, upprepa tills $|f(x_1)|$ är litet.

Integralkatalog

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))g'(x)dx &= \int f(t)dt & \int f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \\
\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 & \int \frac{1}{x}dx &= \ln|x| + C \\
\int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{cos^2 x}dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{sin^2 x}dx &= -\cot x + C \\
\int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1
\end{aligned}$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t)+cx'(t)+kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1e^{s_1t}+C_2e^{s_2t}$ där s_1 och s_2 är lösningar $(s_1 \neq s_2)$ till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2+cs+k = 0$, $(m,\ c,\ k$ konstanter). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at}\left(C_1\cos(bt)+C_2\sin(bt)\right)$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1t}\left(C_1+C_2t\right)$