

Tentamensexempel 2

MVE340 Matematik för Sjöingenjörer del B

Examinator: Carl-Henrik Fant, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: , telefon:

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt på tentamen krävs antingen minst 25 poäng på godkäntdelen, eller minst 5 poäng på varje uppgift. Erhållen poäng på deltentor detta läsår får ersätta poängen på motsvarande uppgifter på tentamen tills kursen ges nästa läsår.

För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 33 resp. 42 poäng sammanlagt på tentamens två delar.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning alla vardagar 9-13, MV:s exp.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkänddelen

1. f är funktionen som ges av $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$

(a) Beräkna gränsvärdena $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^3}$ och $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$ (2p)

(b) Bestäm ekvationer för tangenten och normalen till grafen till f i den punkt på grafen där $x = 3$. (4p)

(c) Bestäm ett intervall av längd högst $\frac{1}{4}$ som innehåller en positiv rot till $f(x) = 0$. (2p)

2. (a) Rita grafen till $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$ på intervallet $[-5, 5]$. Ange funktionens lokala extrempunkter (max och min) samt största och minsta värde på intervallet. (4p)

(b) Bestäm en positiv rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 2$ (samma som i uppgift 1). Du kan vara nöjd då $|f(x_0)| < 0.1$ (1p)

(c) Beräkna arean mellan grafen till $f(x) = x^2 - x - 2$ och x -axeln. (3p)

3. (a) Lös differentialekvationen $y''(t) + 289y(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. (4p)

(b) Lös differentialekvationen $y''(t) + 16y'(t) + 289y(t) = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$. (4p)

4. (a) Lös ekvationssystemet med hjälp av systemets totalmatris: (2p)

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 6 \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$$

(b) Avgör om några av vektorerna $(1, 2, -3)$, $(2, 1, 1)$ och $(5, -7, -3)$ är ortogonala (vinkelräta mot varandra). (2p)

(c) Bestäm alla vektorer som är vinkelräta mot vektorerna $(-2, 1, 2)$ och $(2, -1, 1)$ (2p)

(d) Ange en ekvation för linjen som går genom punkten $(2, 1, 0)$ med riktningsvektor $(2, -1, -2)$. (2p)

Överbetygsdelen

Endast om man ligger enstaka poäng från godkänt och presterat riktigt bra på någon av följande uppgifter kan poäng på denna del räknas in för att nå godkäntgränsen. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösninggång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

6. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan(3x^2)}{x^4 - 2x^3} dx$. (3p)

(b) Beräkna integralen $\int x^3 e^{x^2} dx$. (3p)

7. En behållare utan lock har formen av ett rätblock med kvadratisk bottenplatta. Bottenplattan tillverkas av ett material som är tre gånger så dyrt som materialet i sidväggarna. Bestäm förhållandet mellan behållarens höjd och bottenplattans sida då behållaren har volymen $V m^3$ och materialet i behållaren kostar så lite som möjligt. (6p)

8. Visa att linjen (6p)

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

är parallell med planet som går genom punkterna $(0, 0, 0)$, $(2, 1, -2)$ och $(1, 2, 2)$.

Bestäm skärningspunkten mellan planet och linjen som är vinkelrät mot planet och går genom punkten $(1, -1, 2)$.

Carl-Henrik Fant

Trigonometri.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \quad \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \quad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

Linjär interpolation

$$a < c < b, f(a), f(b) \text{ kända: } f(c) \approx f(a) + \frac{c-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

Gränsvärden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Deriveringsregler

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (kf(x))' = kf'(x) \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några elementära funktioners derivator

$$D(x^p) = px^{p-1} \quad D(e^x) = e^x \quad D(e^{cx}) = ce^{cx} \quad D(a^x) = a^x \ln a$$

$$D(\ln x) = \frac{1}{x} \quad D(\sin x) = \cos x \quad D(\cos x) = -\sin x \quad D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$

$$\text{Tangentens ekvation: } y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{Normalens ekvation: } y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Lösning till ekvationen $f(x) = 0$: Newtons metod

Startvärde x_0 , beräkna: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, upprepa med x_1 som nytt x_0 , upprepa tills $|f(x_1)|$ är litet.

Integralkatalog

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1 \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0$ har den allmänna lösningen $x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där s_1 och s_2 är lösningar ($s_1 \neq s_2$) till differentialekvationens karakteristiska ekvation $ms^2 + cs + k = 0$, (m, c, k konstanter). Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $x(t) = e^{at} (C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $x(t) = e^{s_1 t} (C_1 + C_2 t)$

Vektor(kryss)produkt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$