Tentamen
MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2016-06-01 14.00–18.00

Examinator: Joakim Becker, Matematiska vetenskaper

Telefonvakt och rond: Joakim Becker, telefon: 0738 496962

Hjälpmedel: bifogat formelblad, typgodkänd räknedosa

För godkänt krävs antingen minst 5 poäng per uppgift, eller minst 25 poäng på hela godkäntdelen. Godkända uppgifter enligt pingpong (VT16) är giltiga på denna tenta. För betyg 4 eller 5 krävs dessutom 6 resp. 12 poäng på överbetygsdelen.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) Beräkna $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-x^3}{2x^3+4x^2}$ (2p)

(b) Låt $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Bestäm tangent och normal till f:s graf i punkten där $x = -1$. (3p)

(c) Givet $f'(x) = (x+2)(2-x)(x^2+1)$. I vilket/vilka intervall är funktionen $f(x)$ växande? Motivera. (2p)

(d) Funktionen f har följande värdetabell: (1p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2.3	1.6	0.7	-1.4	-2.3	-3.0	-3.4

Finn ett närmevärde till $f(1.4)$ med linjär interpolering.

2. (a) Låt $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$. Ange alla lokala maxima och minima samt skissa grafen. (3p)

(b) Bestäm en approximation till roten till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 4 - x^2 + x^3$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

(c) Beräkna arean mellan kurvorna $y = x + 3x^2$ och $y = 2x^2 + 5x$. (3p)

3. (a) Bestäm A och B så att funktionen $y(x) = Ax^2 + Bx$ är en lösning till differentialekvationen $y'' - 5y' = x$. (2p)

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y + 2y' = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y'(0) = -3$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 6y' + 25y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$. (4p)

4. (a) Bestäm ekvationen för linjen genom punkterna $(-1, 2, 0)$ och $(4, -3, 2)$ på parameterform. Ange också koordinaterna för en annan punkt på linjen. (2p)

(b) Ange hur man i matlab beräknar skärningspunkten mellan de tre planen $x - 3y - z = 1,\ 4x + 3z = -7$ och $-x + 4y = 8$. Skriv koefficientmatrisen, högerledet samt kommandot för att beräkna lösningen. (2p)

(c) Anpassa enligt minsta-kvadratmetoden en rät linje till mätdata (2p)

x	1	2	3	4	5
y	-3.2	-1.4	0.7	2.1	4.3

. Svara på formen $y = kx + m$.

(d) Ange hur man löser problemet i uppgift c) med matlab. Ställ up den femradiga koefficientmatrisen, högerledet samt kommandot för att bestämma lösningen $k,\ m$. (Inga beräkningar från lösning av uppgift c) behövs). (2p)

Överbetygsdelen

Poäng på dessa uppgifter kan inte räknas in för att nå godkänt. Normalt krävs för poäng på uppgift att man redovisat en fullständig lösningsgång, som i princip lett, eller åtminstone skulle kunnat leda, till målet.

5. Beräkna följande integraler. (6p)

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{1+\tan^2 x}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{x^2+x^{-2}}\,dx.$

6. Bestäm spegelbilden av punkten $P = (2, 0, -3)$ i planet $3x - y + 4z = 1$. En ljusstråle skickas iväg i riktning $(2, -2, 5)$ från punkten P. Bestäm riktningsvektorn för strålens reflektion i planet. (6p)

7. En förpackning i form av en kon skall tillverkas. Givet att volymen skall vara V, bestäm konens dimensioner så att totala arean (inklusive basytan) av höljet blir minimal. Arean av konens mantelyta (den sneda delen) är halva basytans omkrets gånger avståndet från toppen till en punkt på basytans kant. Konens volym är basyta x höjd / 3. (6p)

Lycka till!

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\quad$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\quad$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\quad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\quad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolering.

$a < c < b$, $f(a)$, $f(b)$ kända: $\quad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler.

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\quad$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\quad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några derivator.

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\quad$ $D(e^x) = e^x$ $\quad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\quad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\quad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\quad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

Tangentens ekvation: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ $\quad$ Normalens ekvation: $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0, upprepa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1)$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$ $\qquad$ $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$ $\qquad$ $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$

$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$ $\qquad$ $\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, $\left(s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}\right)$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

Minsta-kvadratmetoden

Anpassa rät linje $y = kx + m$ till punkterna (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

$$\begin{cases} k \cdot \sum x^2 & + m \cdot \sum x & = \sum xy \\ k \cdot \sum x & + m \cdot n & = \sum y \end{cases}$$