Tentamen
MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2017-06-02 08.30–12.30

Rond och tel: JB, 0722 422329

Hjälpmedel: bifogat formelblad, chalmersgodkänd räknedosa

För betyg 3 krävs godkänt på del 1–4 på godkäntdelen (minst 5p/del) annars minst 25 poäng på hela godkäntdelen. Redan godkända delar behöver inte göras om. För betyg 4 eller 5 krävs utöver godkänt på del 1–4 dessutom 6 resp 12 poäng på överbetygsdelen. Resultatet anges i ladok som en poängsumma där del 1=1 "poäng", del 2=2 "poäng", del 3=4 "poäng" och del 4=8 "poäng". T. ex. 10 "poäng" innebär godkänt på del 2 och 4.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) i. Om $f(2) = 4$ och $f(1.9) = 4.5$, beräkna approximativt $f'(2)$. (2p)

ii. Om $g(4) = 1$, $g'(4) = -3.5$, beräkna approximativt $g(4.1)$

(b) Låt $f(x) = (2x-3)^2$. Bestäm tangent till f:s graf i punkten där $x = 1$. Beräkna också tangentens skärningspunkt med x-axeln. (3p)

(c) Givet $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. I vilket/vilka intervall är funktionen $f(x)$ avtagande? Motivera. (2p)

(d) Funktionen f har följande värdetabell: (1p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4.3	-3.7	-3.1	-2.5	-1.7	-0.5	0.3

Finn ett närmevärde till $f(0.7)$ med linjär interpolering.

2. (a) Låt $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 36$. Ange alla lokala maxima och minima samt skissa grafen. (3p)

(b) Bestäm en approximation till roten till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 36$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

(c) Beräkna arean av området som begränsas av $y = x^2 + 4$ och $y = 2x^2 + 3x$. (3p)

3. (a) Bestäm A och B så att $y = Ax + B$ löser differentialekvationen $y' - 4y = 5x - 3$ (2p)

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $5y' + 2y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y'(0) = -1$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $2y'' + 10y' + 13y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$. (4p)

4. (a) Bestäm koordinaterna för skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(4, -3, -1)$ och planet $x - 2y + 4z = -8$. (2p)

(b) Bestäm ekvationen för planet som innehåller punkten $(1, -1, 2)$ och är vinkelrätt mot vektorn $(3, 7, -3)$. Ange också en punkt i planet med x-koordinat $= 0$. (2p)

(c) Anpassa enligt minsta-kvadratmetoden en rät linje till mätdata (2p)

x	1	2	3	4	5
y	2.5	1.7	1.5	0.9	0.4

. Svara på formen $y = kx + m$.

(d) Ange hur man löser problemet i uppgift c) med matlab. Ställ up den femradiga koefficientmatrisen, högerledet samt kommandot för att bestämma lösningen k, m. (Inga beräkningar från lösning av uppgift c) behövs). (2p)

Överbetygsdelen

5. Beräkna följande integraler. (6p)

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \frac{1}{\frac{1}{\tan x} - \tan x}\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x^5}{(x-1)^4(x+1)^4}\,dx.$

6. Bestäm volymen av ett kärl som i genomskärning har formen $y = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ och höjd $y = 1/2$ m. (dvs volymen av den kropp som bildas när området som avgränsas av kurvan och linjen $y = 1/2$ roterar kring y-axeln.) Om man häller i vatten med en konstant takt av 1 liter/s, hur fort stiger vattennivån i kärlet när nivån är 2 dm? Axlarnas enheter är meter. (6p)

7. En funktion har följande egenskap: För varje $x > 0$ gäller att arean under grafen mellan 0 och x är dubbelt så stor som x-koordinaten för skärningspunkten mellan x-axeln och grafens tangent i punkten x. Bestäm funktionen om $y(0) = 3$ och $y'(0) = -2$. (Om grafen hamnar under y-axeln räknar vi arean med tecken.) (6p)

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\quad$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\quad$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\quad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\quad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolering.

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$

Deriveringsregler.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några derivator.

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\quad$ $D(e^x) = e^x$ $\quad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\quad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\quad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\quad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

Tangentens ekvation: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x - a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0, upprepa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad \int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, $\left(s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}\right)$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

Minsta-kvadratmetoden

Anpassa rät linje $y = kx + m$ till punkterna $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

$$\begin{cases} k \cdot \sum x^2 & + m \cdot \sum x & = \sum xy \\ k \cdot \sum x & + m \cdot n & = \sum y \end{cases}$$