Tentamen
MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2017-08-25 08.30–12.30

Rond och tel: Johannes B, 0734 407926

Hjälpmedel: bifogat formelblad, chalmersgodkänd räknedosa

För betyg 3 krävs godkänt på del 1–4 på godkäntdelen (minst 5p/del) annars minst 25 poäng på hela godkäntdelen. Redan godkända delar behöver inte göras om. För betyg 4 eller 5 krävs utöver godkänt på del 1–4 dessutom 6 resp 12 poäng på överbetygsdelen. Resultatet anges i ladok som en poängsumma där del 1=1 "poäng", del 2=2 "poäng", del 3=4 "poäng" och del 4=8 "poäng". T. ex. 10 "poäng" innebär godkänt på del 2 och 4.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) i. Om $f(1) = 3$ och $f(1.1) = 3.3$, beräkna approximativt $f'(1)$. (2p)

ii. Om $g(3) = 2.5$, $g'(3) = 4$, beräkna approximativt $g(3.1)$

(b) Låt $f(x) = (3x - 4)^2$. Bestäm tangenten till f:s graf i punkten där $x = 1$. Beräkna också tangentens skärningspunkt med x-axeln. (3p)

(c) Givet $f'(x) = x^4 - x^3 - 6x^2$. I vilket/vilka intervall är funktionen $f(x)$ avtagande? Motivera. (2p)

(d) Funktionen f har följande värdetabell: (1p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2.7	3.1	2.5	1.8	0.9	0.5	0.3

Finn ett närmevärde till $f(-1.7)$ med linjär interpolering.

2. (a) Låt $f(x) = x^3 - 12x + 5$. Ange alla lokala maxima och minima samt skissa grafen. (3p)

(b) Bestäm en approximation till den negativa roten till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod då $f(x) = x^3 - 12x + 5$. Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 0.05$. (2p)

(c) Beräkna arean av området som begränsas av $y = x^2 + 4$ och $y = 2x + 12$. (3p)

3. (a) Bestäm A och B så att $y = Ax + B$ löser differentialekvationen $y'' - 2y' + y = 3x - 4$ (2p)

(b) Bestäm den lösning till differentialekvationen $-3y' + 2y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y'(0) = 4$. (2p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $4y'' + 16y' + 25y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = -3$, $y'(0) = 7$. (4p)

4. (a) Bestäm koordinaterna för skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, -3, -1)$ och planet $x - 2y + 2z = -10$. (2p)

(b) Bestäm ekvationen för planet som innehåller punkten $(0, -1, 2)$ och är vinkelrätt mot vektorn $(3, 5, -4)$. Ange också en punkt i planet med x-koordinat $= 1$. (2p)

(c) Anpassa enligt minsta-kvadratmetoden en rät linje till mätdata (2p)

x	1	2	3	4	5
y	1.6	2.9	3.7	4.9	5.4

. Svara på formen $y = kx + m$.

(d) Ange hur man löser problemet i uppgift c) med matlab. Ställ up den femradiga koefficientmatrisen, högerledet samt kommandot för att bestämma lösningen k, m. (Inga beräkningar från lösning av uppgift c) behövs). (2p)

Överbetygsdelen

5. Beräkna (6p)

i. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\tan x}\,dx.$

ii. $\displaystyle\int \frac{1-x^{-2}}{2++x^2+x^{-2}}\,dx.$

6. Området under linjen $y = 1 - 2x$ i första kvadraten delas av två linjer $y = kx$ resp $y = 2kx$ där $k > 0$. Bestäm k så att arean av triangeln med hörn i origo samt i linjernas skärningspunkter blir maximal. Bestäm också det k för vilket vinkeln mellan de båda linjerna (genom origo) blir maximal. (6p)

7. En person vill besöka sin käresta på diagonalt motsatt punkt av en cirkular sjö med radie 5 km. I hopp om att spara tid ror han först med 2 km/h och går sedan med 3 km/h närmaste vägen efter stranden. Dock visar det sig att han lyckats välja tidsmässigt sämsta möjliga riktning. I vilken riktning i förhållande till diagonalen rodde han? (6p)

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolering.

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler.

$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ $\qquad$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ $\qquad$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

Några derivator.

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

Tangentens ekvation: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0, upprepa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$\int x^a\,dx$	$= \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx$	$= \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin x\,dx$	$= -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx$	$= \sin x + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$= \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$= -\cot x + C$
$\int e^x\,dx$	$= e^x + C$	$\int a^x\,dx$	$= \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$= \int f(t)\,dt$	$\int f(x)g(x)\,dx$	$= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, $\left(s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}\right)$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1t}(C_1 + C_2t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$$

Minsta-kvadratmetoden

Anpassa rät linje $y = kx + m$ till punkterna $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

$$\begin{cases} k \cdot \sum x^2 & + m \cdot \sum x & = \sum xy \\ k \cdot \sum x & + m \cdot n & = \sum y \end{cases}$$