

Tentamen

MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2018-08-29 08.30–12.30

Rond och tel: 6792 Sandra E B (Kursansv Joakim B, 0722422329)

Hjälpmedel: bifogat formelblad, chalmersgodkänd räknedosa

För betyg 3 krävs 20 poäng på godkäntdelen. För betyg 4 eller 5 krävs totalt 34 resp 43 varav minst 6 resp 12 poäng på överbetygsdelen. Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) i. Om $f(3) = 1.2$ och $f(3.1) = 1.6$, beräkna approximativt $f'(3)$. (2p)
ii. Om $g(-2) = -3$, $g'(-2) = -4$, beräkna approximativt $g(-2.2)$
- (b) Låt $f(x) = (x^2 - 2)^2$. Bestäm tangenten till f 's graf i punkten där $x = -1$. Beräkna också tangentens skärningspunkt med x -axeln. (3p)
- (c) Givet $f'(x) = 2 - 3x - 2x^2$. I vilket/vilka intervall är funktionen $f(x)$ avtagande? Motivera. (2p)
- (d) Funktionen f har följande värdetabell:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	2	2.4	3.2	2.1	0.5	-0.2	-1.6

 (1p)
Finn ett närmevärde till $f(-1.6)$ med linjär interpolering.
2. (a) Beräkna integralen $\int_{-1}^3 f(x) dx$ om grafen för f består av räta linjestycken mellan punkterna i uppgift 1(d) ovan. (1p)
- (b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $x^3 + 6x - 10 = 0$ med Newtons metod. Du kan vara nöjd då $|f(x)| \leq 0.05$. (2p)
- (c) Låt $f'(x) = (2 + x)(x - 1)$. Bestäm $f(x)$ så att $f(1) = -3$ samt ange lokala maxima resp minima till f . (2p)
- (d) Bestäm arean av det område som begränsas av $y = x^2 + 1$ och $y = 1 - 5x$. (3p)
3. (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y + 3y' = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) - y'(0) = 4$. (2p)
- (b) Bestäm A och B så att $y = Ae^{3x} + Be^{-3x}$ löser differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 6e^{3x} + 7e^{-3x}$ (3p)
- (c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y' + 5y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. (3p)
4. (a) Bestäm koordinaterna för skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(4, 2, 1)$ och planet $x - 2y + 3z = 4$. (2p)
- (b) En stång med ändpunkter $A = (0, 2, -1)$ och $B = (2, 0, -3)$ parallellförflyttas av en kraft $\mathbf{F} = (4, -1, 2)$. I vilket plan sker rörelsen? Ange planets ekvation. (2p)
- (c) Anpassa enligt minsta-kvadratmetoden en rät linje till mätdata

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2.5	2	0.5

. Svara på formen $y = kx + m$. (2p)
- (d) Ange hur man löser problemet i uppgift c) med matlab. Ställ up den femradiga koefficientmatrisen, högerledet samt kommandot för att bestämma lösningen k , m . (2p)
(Inga beräkningar från lösning av uppgift c) behövs).

Överbetygsdelen

5. Beräkna antiderivatorna till följande funktioner (6p)

(a) $\frac{1}{1 - \tan^2 x}$

(b) $\frac{x^2 + x^{-1}}{x^3 + x^{-3}}$

6. En sektor av enhetscirkeln bildas av linjerna $y = kx$ och $y = 2kx$ där $k > 0$. För vilket k är cirkelsektorns area maximal? (6p)

7. Låt $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ med $D_f = \mathbb{R} =$ mängden av alla reella tal. (6p)

(a) Visa att f är inverterbar.

(b) Finn den inversa funktionens derivata, d.v.s. finn $(f^{-1})'(x)$.

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) & \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) & \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) & 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Linjär interpolering.

$$a < c < b, f(a), f(b) \text{ kända: } f(c) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a)$$

Deriveringsregler.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några derivator.

$$\begin{aligned}D(x^p) &= px^{p-1} & D(e^x) &= e^x & D(e^{cx}) &= ce^{cx} & D(a^x) &= a^x \ln a \\ D(\ln x) &= \frac{1}{x} & D(\sin x) &= \cos x & D(\cos x) &= -\sin x & D(\tan x) &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

$$\text{Tangentens ekvation: } y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{Normalens ekvation: } y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0 , upprepa $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$$\begin{aligned}\int x^a dx &= \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1) \\ \int f(g(x))g'(x) dx &= \int f(t) dt & \int f(x)g(x) dx &= F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, $\left(s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}\right)$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1 \cos(bt) + C_2 \sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1 t}(C_1 + C_2 t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Minsta-kvadratmetoden

Anpassa rät linje $y = kx + m$ till punkterna $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

$$\begin{cases} k \cdot \sum x^2 + m \cdot \sum x = \sum xy \\ k \cdot \sum x + m \cdot n = \sum y \end{cases}$$