Tentamen
MVE340 Matematik 2 för Sjöingenjörer

2018-10-12 08.30–12.30

Rond och tel: Joakim B, 0722422329

Hjälpmedel: bifogat formelblad, chalmersgodkänd räknedosa

För betyg 3 krävs 20 poäng på godkäntdelen. För betyg 4 eller 5 krävs totalt 34 resp 43 varav minst 6 resp 12 poäng på överbetygsdelen. Bonuspoäng från duggor 2018 räknas med.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar redovisas. Motivera och förklara så väl du kan.

Godkäntdelen

1. (a) i. Om $f(1) = 3$ och $f(1.1) = 2.8$, beräkna approximativt $f'(1)$. (2p)

ii. Om $g(-1) = -2$, $g'(-1) = -3$, beräkna approximativt $g(-1.2)$

(b) Låt $f(x) = (x^3 - 2)^2$. Bestäm tangenten till f:s graf i punkten där $x = -1$. Beräkna också tangentens skärningspunkt med x-axeln. (3p)

(c) Givet $f'(x) = 3 - 5x - 2x^2$. I vilket/vilka intervall är funktionen $f(x)$ avtagande? Motivera. (2p)

(d) Funktionen f har följande värdetabell: (1p)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	3.5	2.4	1.6	0.7	-0.2	-1.1	-1.6

Finn ett närmevärde till $f(-2.7)$ med linjär interpolering.

2. (a) Beräkna integralen $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ om grafen för f består av räta linjestycken mellan punkterna i uppgift 1(d) ovan. (1p)

(b) Bestäm en approximativ rot till ekvationen $x^3 + 5x + 4 = 0$ med Newtons metod. Du kan vara nöjd då $|f(x)| \leq 0.05$. (2p)

(c) Låt $f'(x) = (x + 3)(1 - 2x)$. Bestäm $f(x)$ så att $f(1) = \dfrac{1}{2}$ samt ange lokala maxima resp minima till f. (2p)

(d) Bestäm arean av det område som begränsas av $y = x^2 + 2$ och $y = 2 - 3x$. (3p)

3. (a) Bestäm den lösning till differentialekvationen $5y + 4y' = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoret $3y(0) + 2y'(0) = 1$. (2p)

(b) Bestäm $A,\ B$ så att $y = Ae^{2x} + B\cos(3x)$ löser differentialekvationen $y'' + 5y = 6e^{2x} + \cos(3x)$. (3p)

(c) Bestäm den lösning till differentialekvationen $2y'' + 2y' + 13y = 0$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$. (3p)

4. (a) Bestäm koordinaterna för skärningspunkten mellan linjen $(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(5, -3, 2)$ och planet $x + 2y + 3z + 5 = 0$. (2p)

(b) En stång med ändpunkter $A = (0, 0, 1)$ och $B = (2, -4, 3)$ parallellförflyttas av en kraft $\mathbf{F} = (1, -5, 6)$. I vilket plan sker rörelsen? Ange planets ekvation. (2p)

(c) Anpassa enligt minsta-kvadratmetoden en rät linje till mätdata (2p)

x	1	2	3	4	5
y	2	3	5.5	5	6.5

. Svara på formen $y = kx + m$.

(d) Ange hur man löser problemet i uppgift c) med matlab. Ställ up den femradiga koefficientmatrisen, högerledet samt kommandot för att bestämma lösningen $k,\ m$. (Inga beräkningar från lösning av uppgift c) behövs). (2p)

Överbetygsdelen

5. Beräkna antiderivatorna (dvs primitiv funktion) till följande funktioner (6p)

(a) $\dfrac{(1+\cos x)^2}{1+\cos 2x}$

(b) $\dfrac{x^5}{(x^3+x^{-3})^2}$

6. En rektangel ligger i första kvadranten och har var sitt hörn på x- resp y-axeln och två hörn på enhetscirkeln. Beräkna rektangelns maximala area. (6p)

7. Låt $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ med definitionsmängd $x \geq 0$. (6p)

(a) Beräkna $(f'(x))^2 - (f(x))^2$

(b) Finn den inversa funktionens derivata, d.v.s. finn $(f^{-1})'(x)$.

Formelblad för MVE340.

Trigonometri.

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ $\qquad$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Linjär interpolering.

$a < c < b,\ f(a),\ f(b)$ kända: $\qquad f(c) \approx f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$

Deriveringsregler.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Några derivator.

$D(x^p) = px^{p-1}$ $\qquad$ $D(e^x) = e^x$ $\qquad$ $D(e^{cx}) = ce^{cx}$ $\qquad$ $D(a^x) = a^x \ln a$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $D(\sin x) = \cos x$ $\qquad$ $D(\cos x) = -\sin x$ $\qquad$ $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Tangent och normal i en punkt $(a, f(a))$ på grafen till $f(x)$.

Tangentens ekvation: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ $\qquad$ Normalens ekvation: $y = f(a) - \dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

Numerisk lösning av ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod.

Startvärde x_0, upprepa $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})|$ är litet nog.

Integralkatalog.

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad (a \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad \int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Differentialekvationer

Differentialekvationen $my''(t) + cy'(t) + ky(t) = 0$ har den allmänna lösningen $y(t) = C_1e^{s_1t} + C_2e^{s_2t}$ där $s_{1,2}$ är lösningar till karakteristiska ekvationen $ms^2 + cs + k = 0$, $\left(s = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}\right)$. Om $s_{1,2} = a \pm ib$ så är $y(t) = e^{at}(C_1\cos(bt) + C_2\sin(bt))$. Om $s_1 = s_2$ så är $y(t) = e^{s_1t}(C_1 + C_2t)$.

Vektor(kryss)produkt

$$u \times v = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1) = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Minsta-kvadratmetoden

Anpassa rät linje $y = kx + m$ till punkterna $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

$$\begin{cases} k \cdot \sum x^2 & +m \cdot \sum x & = \sum xy \\ k \cdot \sum x & +m \cdot n & = \sum y \end{cases}$$