

Linjär interpolering

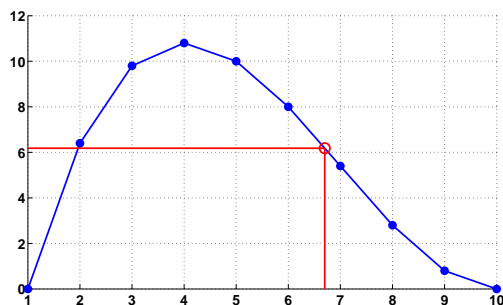
I praktiska tillämpningar förekommer det ofta att man inte känner till ett exakt uttryck för den funktion man är intresserad av, utan endast dess värde i ett antal punkter, t ex genom mätningar. För att uppskatta funktionens värde i andra punkter får man använda någon form av *interpolering*.

Exempel. Antag att storheterna x och y uppfyller sambandet $y = f(x)$, och att vi har följande data:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	6.4	9.8	10.8	10	8	5.4	2.8	0.8	0

Finns ett närmevärde till $f(6.7)$.

Lösning. Vi använder *linjär interpolering*, d v s vi binder samman de givna punkterna med räta linjestycken och läser av det önskade värdet $f(6.7)$ ur grafen (se figur 1).



Figur 1: Närmevärde till $f(6.7)$ genom linjär interpolering.

Snarare än att visuellt läsa av närmevärdet i figuren, räknar vi ut det på följande sätt. Ekvationen för den räta linjen genom de två punkterna $(6, 8)$ och $(7, 5.4)$ ges av

$$y - 8 = k(x - 6), \quad \text{där } k = \frac{5.4 - 8}{7 - 6} = -2.6.$$

Med $x = 6.7$ får vi $y = 8 - 2.6 \cdot (6.7 - 6) = 6.18$, vilket är vårt önskade närmevärde.

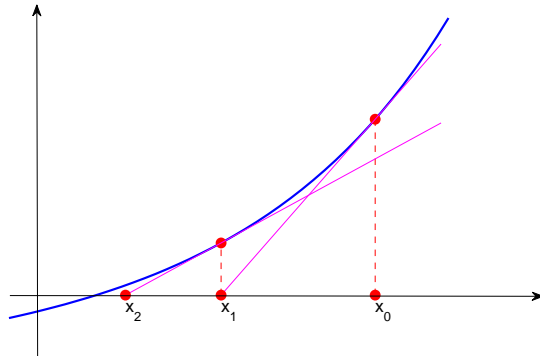
□

Allmänt kan vi alltså, om värdet av en funktion f är känt i två punkter a och b , där $a \leq b$, räkna ut ett närmevärde till funktionen i en punkt $c \in [a, b]$ med formeln

$$f(c) \approx f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(c - a).$$

Newton's metod

Vi vill nu hitta ett nollställe till funktionen f (dvs. en rot till ekvationen $f(x) = 0$), se figur 2. Först väljer vi ett lämpligt startvärde x_0 . Tangenten av f i punkten x_0 , dvs



Figur 2: Newtons metod

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, är en bra approximation för f i närheten av x_0 . Därför är det rimligt att anta att ett nollställe till tangenten ligger nära det sökta nollstället till f . Och vi sätter $y = 0$ i tangentens ekvation och löser ut $x = x_1$ får vi

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Detta blir vårt nästa närmevärde. Vi upprepar sedan proceduren, enligt formeln

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

tills vi uppnått önskad noggrannhet.

Exempel. Finn en rot till ekvationen $x^3 - x - 1 = 0$ med Newtons metod.

Lösning. Låt $f(x) = x^3 - x - 1$. Vi har att $f(1) < 0$ och $f(2) > 0$, så en rot måste finnas i intervallet $[1, 2]$. Låt oss därför välja $x_0 = 1.5$ som startvärde. Nu behöver vi även derivatan av f :

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Med formeln ovan räknar vi ut nästa närmevärde:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{1.5^3 - 1.5 - 1}{3 \cdot 1.5^2 - 1} = 1.3478 \dots$$

För att se hur nära vi är den sanna roten, räknar vi ut $f(x_1) = 0.1006\dots$ (vi behöver ju ändå detta värde i nästa steg). Nu upprepar vi proceduren och får

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3252\dots, \quad f(x_2) = 0.002058\dots$$

Ett steg till ger

$$x_3 = 1.3247, \quad f(x_3) = 0.0000009243\dots$$

Som synes närmar vi oss roten mycket snabbare än med intervallhalveringsmetoden.

□

Numerisk integration

Anta att vi vill approximera integralen av funktionen i exemplet med linjär interpolering ovan. Då kan vi ta summan av areorna under varje linjestycke.

Exempel.

$$\int_2^6 f(x) dx \approx 1 \cdot \frac{6.4+9.8}{2} + 1 \cdot \frac{9.8+10.8}{2} + 1 \cdot \frac{10.8+10}{2} + 1 \cdot \frac{10+8}{2} = \frac{66.6}{2}$$

I varje delintervall har vi alltså använt approximationen $\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$. Denna metod att approximera en integral kallas trapetsregeln och ju fler intervall man delar in integrationsområdet i desto bättre blir approximationen. □

Övningar

1. Till en funktion f har vi följande värdetabell:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	-3.4	-2.7	-0.3	0.8	0	-0.3	1.3	3.0	1.6	-2.7

Skissa grafen till funktionen för $1 \leq x \leq 10$. Beräkna närmevärde till $f(3.7)$ med hjälp av linjär interpolering.

2. Antag att storheterna x och y uppfyller sambandet $y = g(x)$, och att vi har erhållit följande mätdata:

x	0.2	1.2	2.0	3.3	4.1	5.0
y	8.0	7.6	5.5	0.6	-1.7	-1.0

Beräkna ett närmevärde till $g(3.0)$ med linjär interpolering.

3. Bestäm en rot till ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod, då

(a) $f(x) = x^3 + 2x + 5,$

(b) $f(x) = x^5 - x^3 - 1.$

Du kan vara nöjd då $|f(x_k)| < 10^{-3}.$

4. Beräkna approximativt integralerna av funktionen i övning 1.

(a) $\int_1^5 f(x) dx,$

(b) $\int_6^{10} f(x) dx.$

5. Antag att storheterna x och y uppfyller sambandet $y = f(x),$ och att vi har följande data:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-1.7	-1.1	-0.5	0.2	1	2.2	-1.4	2.8	4	0

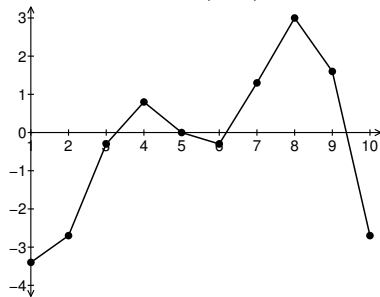
Beräkna approximativt integralerna.

(a) $\int_1^5 f(x) dx,$

(b) $\int_6^{10} f(x) dx.$

Facit

1. Närmevärde: $f(3.7) \approx 0.47.$ Graf:



2. $f(3.0) \approx 1.73.$

3. (a) -1.3284

(b) 1.2365

4. (a) -3.9

(b) 4.4

5. (a) -1.75

(b) 6.5