

Extra övningar differentialekvationer

1. Kvantiteten av ett läkemedel som finns i kroppen hos en patient avtar i en takt som är proportionell mot den mängd som finns kvar i kroppen. Låt $f(t)$ vara kvantiteten som finns i kroppen vid tiden t .

(a) Bestäm f om hälften av ursprungskvantiteten var kvar efter 2 timmar.

(b) Hur länge efter intag av medicinen är 10% kvar i kroppen?

(Svar: $y' = -ky$, $y = Ce^{-kt}$, efter $2 \ln(10)/\ln 2$ timmar)

2. Den takt med vilken ett istäcke växer till vid konstant temperatur antas vara omvänt proportionell mot isens tjocklek. Det betyder att en tjockare is växer långsammare än en tunn. Låt $f(t)$ vara isens tjocklek (cm) vid tiden t (i timmar). Skriv upp en differentialekvation som f löser och bestäm f om isens tjocklek är 1 cm vid tiden $t = 0$ och 2 cm efter 1 timme. När är isens tjocklek 3 cm?

(Svar: $y' = k/y$, $y = \sqrt{2kt + C}$, $f(t) = \sqrt{3t + 1}$, efter 2 timmar och 40 minuter.)

3. Om information sprids från mun till mun i en population kan man förvänta sig att den takt de som har kännedom om informationen ökar är proportionell mot produkten av antalet som känner till informationen och antalet som inte gör det. Låt $f(t)$ vara antalet som känner till informationen vid tiden t och M vara antalet individer i populationen. Skriv upp en differentialekvation som f löser och bestäm f om bara en person kände till informationen vid tiden $t = 0$.

(Svar: $y' = ky(M - y)$, $y = M/(1 + Ce^{-Mkt})$, $f(t) = M/(1 + (M - 1)e^{-Mkt})$)