Ickelinjära ekvationer

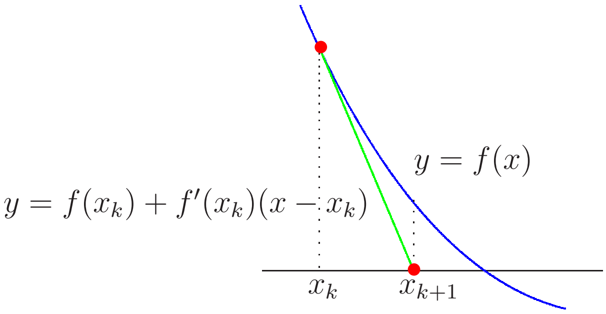
En lösning x^* till en ekvation $f(x) = 0$ kallas ett nollställe eller en rot. Om vi inte kan få fram någon formel för att lösa en ekvation så kan vi beräkna en approximation med t.ex. **Newtons metod**: Antag att x_k är en approximation av ett nollställe till ekvationen $f(x) = 0$. Följ tangenten i punkten $(x_k, f(x_k))$, dvs.

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

ned till x-axeln ($y = 0$) och tag skärningspunktens x-koordinat

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

som en ny approximation av nollstället.



Som exempel tar vi: Lös ekvationen $f(x) = 0$ där $f(x) = \cos(x) - x$. En graf (rita den gärna) visar att vi har ett nollställe och vi tar $x_0 = 1$ som startapproximation.

```
>> f=@(x)cos(x)-x; Df=@(x)-sin(x)-1;
>> x=1;
>> kmax=10; tol=0.5e-8;
>> for k=1:kmax
       h=-f(x)/Df(x);
       x=x+h;
       disp([x h])
       if abs(h)<tol, break, end
   end

   0.750363867840244  -0.249636132159756
   0.739112890911362  -0.011250976928882
   0.739085133385284  -0.000027757526078
   0.739085133215161  -0.000000000170123
```

Vi ser att vi får snabb konvergens mot nollstället, en fördubbling av antal korrekta decimaler i varje steg.

Uppgift 1. Låt $f(x) = 3\cos(2x) - x^3 - 2$. Lös ekvationen $f(x) = 0$. Rita upp grafen till f för att se var ungefär nollställena ligger. Hur många nollställen finns det? Läs av i grafiken en första approximation av ett nollställe för att sedan förbättra denna med Newtons metod. Rita ut nollstället med en liten ring. Upprepa tills du beräknat alla nollställen till ekvationen.

Uppgift 2. Skriv en `function` som löser ekvationen $f(x) = 0$ med Newtons metod. Funktionen skall heta `min_newton` och skall som indata ges två funktioner, dels en som beräknar $f(x)$ dels en som beräknar $f'(x)$, en startapproximation av lösningen, samt den noggrannhet lösningen skall bestämmas med. Funktionen skall som utdata ge en approximation av nollstället som uppfyller noggrannhetskravet. Använd programskalet `min_newton.m` som du finner på kurshemsidan.

Uppgift 3. Pröva nu din funktion `min_newton` på ekvationerna nedan. Glöm inte att rita grafer och se till att du bestämmer samtliga nollställen.

(a). $f(x) = 3\cos(2x) - x^3 - 2 = 0$ **(b).** $f(x) = \exp(-0.5x^2) + x^3 - 2x - 0.5 = 0$

Färdiga program i Matlab

Det finns en färdig funktion `fzero` i Matlab för att finna nollställen. Som indata tar `fzero` en funktion samt en första approximation av ett nollställe till funktionen och som utdata ger den (förhoppningsvis) en noggrann approximation av detta nollställe.

Om vi skulle använda `fzero` för att beräkna ett av nollställena i uppgift 1 skulle det kunna se ut så här

```
>> f=@(x)3*cos(2*x)-x.^3-2;
>> x0=-0.5;
>> x=fzero(f,x0)
```

Uppgift 4. Kastbana utan luftmotstånd beskrivs av

$$y(x) = y_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)}\left(x - \frac{v_0^2\sin(2\theta)}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2(\theta)}{2g}$$

där y_0 är utkasthöjden, v_0 är utkastfarten θ är utkastvinkeln och g är tyngdaccelerationen.

Hur långt når kastet om vi tar $y_0 = 1.85$ m, $v_0 = 10$ m/s, $g = 9.81$ m/s^2 och $\theta = 45°$? Beskriv ekvationen med en funktionsfil. Rita en graf så du ser var ungefär nedslagsplatsen ligger och använd sedan `fzero` för att bestämma den noggrannt.