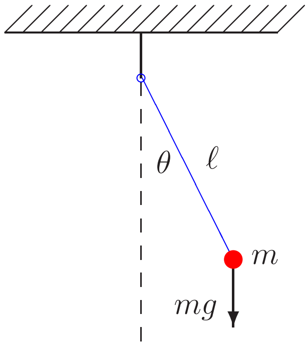
Visualisering

Vi har tidigare sett på den dämpade matematiska pendeln. En masspunkt med massan m hänger i en viktlös smal stav av längden ℓ.



Pendelns rörelse beskrivs av Newtons andra lag enligt (c är dämpningskonstanten)

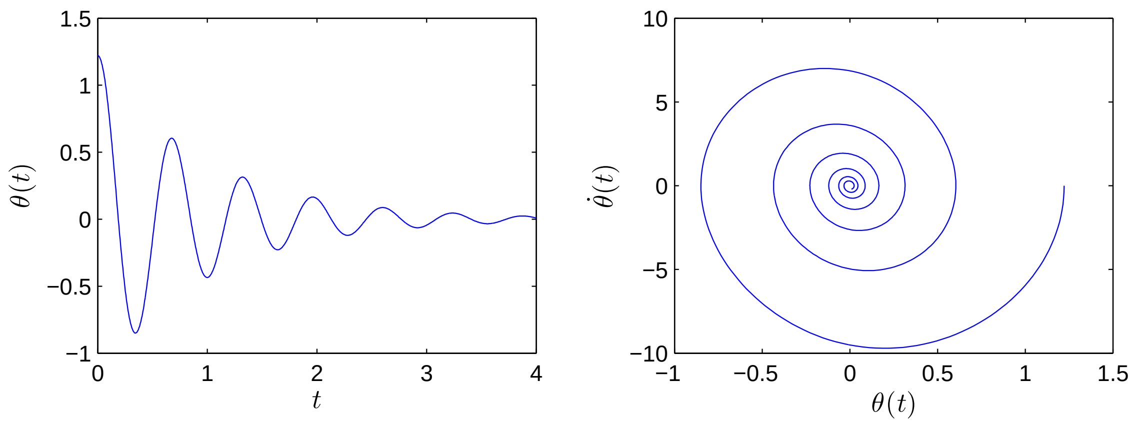
$$m\ell\,\ddot{\theta}(t) = -mg\sin(\theta(t)) - c\ell\,\dot{\theta}(t)$$

med tillhörande begynnelsevillkor på utslagsvinkeln θ och vinkelhastighet $\dot{\theta}$.

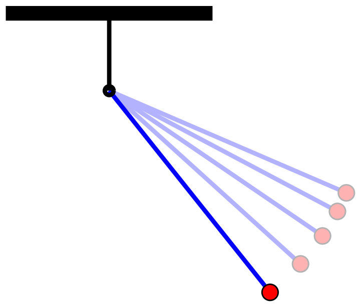
Vi införde variabeln $\varphi = \dot{\theta}$ så att vi kunde skriva om differentialekvationen på standardform, dvs. som ett första ordningens system.

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \varphi \\ \dot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) - \frac{c}{m}\varphi \end{cases}$$

Vi löste differentialekvationen numeriskt och ritade upp lösningen. Här ser vi resultatet för en viss begynnelsevinkel då pendeln släpps från vila.



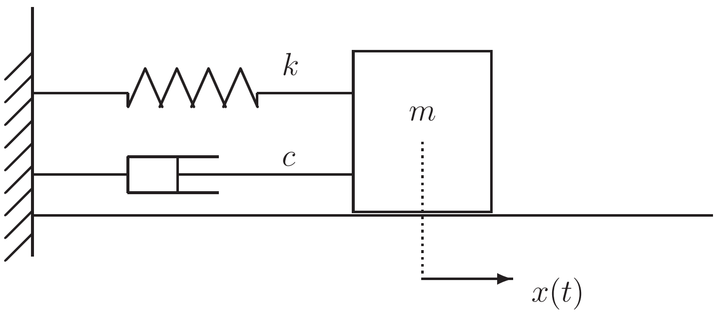
Bilden vi ritade är en typ av visualisering, en graf. Nu skall vi se på ett annat alternativ, en animering.



Vi vill se hur pendeln svänger fram och tillbaka. Först ritar vi pendeln i sitt begynnelsetillstånd, därefter med lagom tidsavstånd ritar vi om pedeln i sitt nya läge. Vi visar bara ett pendelläge åt gången (i bilden ovan försöker vi antyda en rörelse med en enda bild).

Uppgift 1. Utför animeringen i MATLAB. Tag som tidigare $\ell = 0.1$, $m = 0.1$ och $c = 0.2$ samt begynnelseutslagsvinkeln $\theta_0 = 70°$.

Ett annat exempel är följande: En kloss med massan m kan röra sig friktionsfritt längs en horisontell linje. Klossen är fäst i en fjäder med fjäderkonstanten k och en stötdämpare, vars dämpning är proportionell mot hastigheten och motriktad rörelsen.



Om $x(t)$ är avvikelsen från jämviktsläget vid tiden t så ger Newtons andra lag ekvationen

$$mx'' = -kx - cx'$$

Låt $\lambda = \frac{c}{2m}$ och $\mu = \sqrt{\frac{k}{m}}$ så kan ekvationen skrivas

$$x'' + 2\lambda x' + \mu^2 x = 0$$

Denna ekvation är av andra ordningen med konstanta koefficienter och kan lösas analytiskt. Lösningarna till karakteristiska ekvationen $r^2 + 2\lambda r + \mu^2 = 0$ ger tre fall:

Fall I. $\lambda > \mu$. Två olika reela rötter $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$, båda är negativa, och lösningarna blir

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t}$$

Vi ser att $x(t)$ snabbt går mot 0 då $t \to +\infty$, dvs. en överkritisk dämpning.

Fall II. $\lambda = \mu$. En dubbelrot $r_1 = r_2 = -\lambda$ och lösningarna

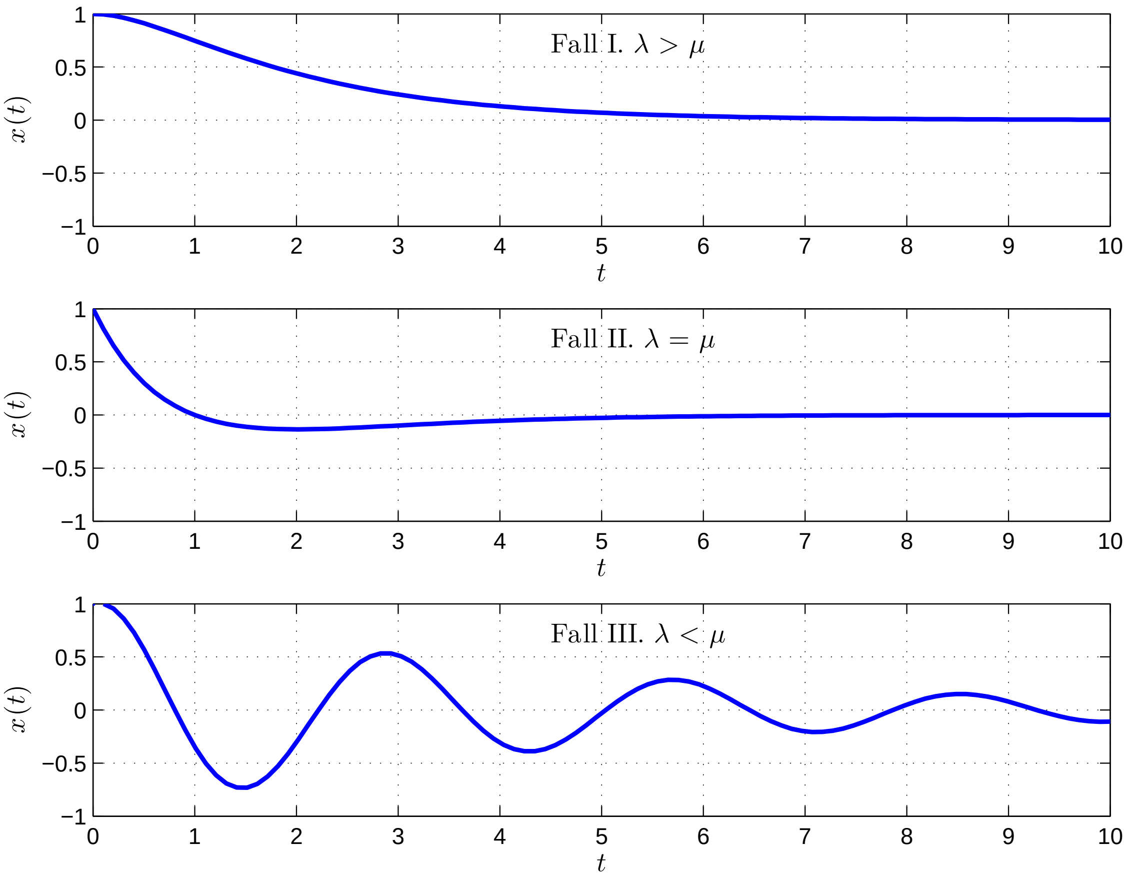
$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Lösningskurvan passerar jämviktsläget högst en gång, har högst ett extremvärde och går snabbt mot 0, dvs. kritisk dämpning.

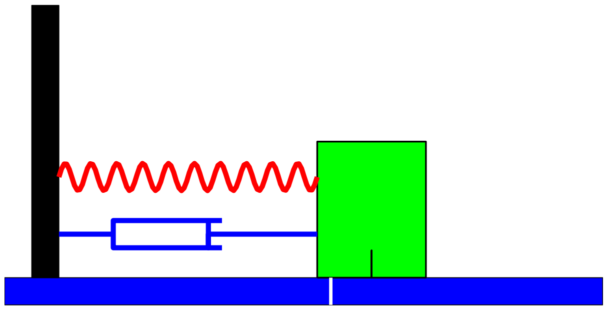
Fall III. $\lambda < \mu$. Två komplexa rötter $r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$ och lösningarna blir

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)), \quad \beta = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$$

En oscillerande rörelse kring jämviktsläget med exponentiellt avtagande amplitud, dvs. en dämpad svängning.



Nu vill vi göra en animering så vi ser hur klossen svänger fram och tillbaka.



Uppgift 2. Utför animeringen i MATLAB. Tag $m = 0.1, k = 0.12, c = 0.01$ (dämpad svängning) och begynnelseläget $x_0 = 0.15$.