Matematik
Chalmers tekniska högskola 2018-10-13 kl. 08:30-12:30

Tentamen MVE355, Programmering och numeriska beräkningar med Matlab.

Ansvarig: Katarina Blom , tel 772 10 97.
Telefonvakt under tentan: Katarina Blom, ankn 1097 Plats: L
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 16−23 p. ger betyget 3, 24−31 p. ger betyget 4 och 32 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 40.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 (a) Formulera vänster rektangelregel för beräkning av integraler. (3p)

(b) Skriv en matlabsekvens som beräknar approximationer till integralerna $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$ och $2\int_0^1 e^{-x^2}dx$. Använd vänster rektangelregel och steglängden $h = 0.2$. (3p)

(c) Eftersom $f(x) = e^{-x^2}$ är en jämn funktion (dvs. $f(x) = f(-x)$) gäller det att (3p)

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx = 2\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

Kommer de bägge approximationerna i b-uppgiften att ge samma svar? Motivera ditt svar noga. (I uppgift 2 finns en graf av funktionen $f(x) = e^{-x^2}$).

(d) Skriv en matlab-funktion (`function`) som beräknar ett värde på (3p)

$$F(x) = 2 + 2\int_1^x ty(t)dt$$

Låt funktionen heta `F` och låt den ha två parametrar, x (ett tal) och funktionen $y(t)$. (Använd `integral`).

(a) Se litteraturen.

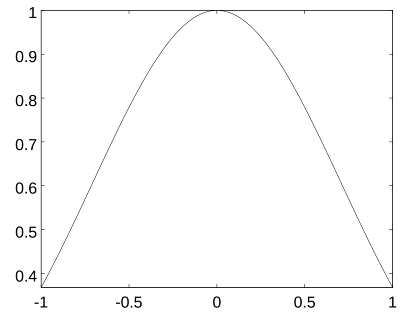
(b)
```
n1 = 10; n2 = 5; h = 0.2;
x1 = linspace(-1,1,n1+1);
x2 = linspace(0,1,n2+1);
f = @(x)exp(-x.^2);
qv1 = sum(f(x(1:n1))*h);
qv2 = 2*sum(f(x(1:n2))*h);
```

(c) Nej man kommer inte att få samma svar. Funktionen avtar på intervallet $0 \leq x \leq 1$ så vänsterregeln ger ett för stort värde på integralen, approximationen av $2\int_0^1 e^{-x^2}dx$ blir för stor. Funktionen är växande på intervallet $-1 \leq x \leq 0$ så när man beräknar $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$ med vänster rektangelregel får man ett för litet värde på intervallet $-1 \leq x \leq 0$ och ett för stort värde på intervallet $0 \leq x \leq 1$.

(d)
```
F = @(x,y)2+2*integral(@(t)t.*y(t),1,x);
```

---

2 I figuren nedan har man ritat funktionen $f(x) = e^{-x^2}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.



Funktionskurvan delar in figuren i tre delar, en del till vänster, en del i mitten och en del till höger. Skriv ett program i Matlab som låter användaren upprepade gånger klicka med musen i figuren. Om användaren vänsterklickar i den vänstra delen ska den färgas grön, om användaren vänsterklickar i mittendelen ska området färgas rött och om användaren vänsterklickar i den högra delen ska den färgas blå. Bara en del ska vara ifylld med färg efter varje klick. Om användaren högerklickar med musen ska programmet avslutas. (10p)

```
f=@(x)exp(-x.^2);
x=linspace(-1,1);
plot(x,f(x));
axis manual; hold on;

while 1
  [xk,yk,k] = ginput(1);
  if k == 3
    break;
  end
  if xk < 0 & yk > f(xk)     % vänster område
    cv = 'green'; ch = 'white'; cm = 'white';
  elseif xk > 0 & yk > f(xk) % höger område
    cv = 'white'; ch = 'blue'; cm = 'white';
  else
    cv = 'white'; ch = 'white'; cm = 'red';
  end
  x = linspace(-1,0);
  fill([x -1 -1],[f(x) 1 f(-1)],cv);
  x = linspace(0,1);
  fill([x 1 0],[f(x) 1 f(0)],ch);
  x = linspace(-1,1);
  fill([x -1],[f(x) f(-1)],cm)
end
```

---

3 För att bestämma $\sqrt{c}$, där c är ett positivt tal, kan man använda Newton's metod och lösa ekvationen

$$f(x) = x^2 - c = 0$$

(a) Skriv en sekvens i Matlab som läser in ett tal c och som beräknar $\sqrt{c}$ med Newton's metod. Använd talet $x_0 = c$ som startvärde. (5p)

(b) Förklara vad som händer om man startar med $x_0 = 0$ istället för $x_0 = c$. (2p)

(a)
```
c = input('Ange ett värde på c ');
f=@(x,c)x.^2-c;
df=@(x)2.*x;
x = c;
for i = 1:10
  h = -f(x,c)/df(x);
  x = x+h;
end
disp(x)
```

(b) Derivatan $f'(x) = 2x$ blir 0, så Newton's metod kommer inte att konvergera.

---

4 En viss kemisk reaktion beskrivs av följande system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} u_1'(t) = s(u_2(t) - u_1(t)u_2(t) + u_1(t) - qu_1(t)^2) \\ u_2'(t) = \frac{1}{s}(u_3(t) - u_2(t) - u_1(t)u_2(t)) \\ u_3'(t) = w(u_1(t) - u_3(t)) \\ u_1(0) = 4, u_2(0) = 1.1, u_3(0) = 4 \end{cases}$$

där u_1, u_2 och u_3 är koncentrationer av tre kemiska substanser, $s = 77.27$, $q = 8.375 \cdot 10^{-6}$ och $w = 0.1610$.

(a) Skriv en matlabsekvens som beräknar och ritar ut lösningen till differentialekvationen på intervallet $0 \leq t \leq 10$. Använd `ode45`. (4p)

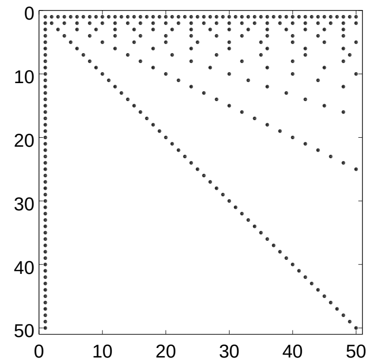
(b) Använd lösningen från a-uppgiften och skriv en sekvens som bestämmer det värde på t där $u_1(t)$ är störst. (Om det finns flera sådana värden på $u_1(t)$ räcker det om din sekvens bestämmer det minsta t-värdet). (3p)

(a)
```
s = 77.27;
q = 8.375;
w = 0.1610;
f=@(t,u)[s*(u(2)-u(1)*u(2)+u(1)-q*u(1).^2);
         1/s*(u(3)-u(2)-u(1)*u(2));
         w*(u(1)-u(3))];
u0=[4;1.1;4];
[t,U]=ode45(f,[0,10],u0);
plot(t,U);
```

(b)
```
[umax p] = max(U(:,1));
svar = t(p);
```

---

5 En Redheffer matris är en $n \times n$ matris där elementet på rad i och kolumn j har värdet 1 om i delar j, eller om $j = 1$. Figuren nedan visar en 50×50 Redheffermatris. De nollskilda elementen har markerats.



Skriv en sekvens i Matlab som skapar en Redheffermatris med 50 rader och 50 kolumner. (4p)

```
A=zeros(50);
A(1,:)=1;A(:,1)=1;
for i = 1:n
  for j = 1:n
    if mod(j,i)==0
      A(i,j)=1;
    end
  end
end
```
