Matematik
Chalmers tekniska högskola 2018-05-28 kl. 08:30-12:30

Tentamen MVE355, Programmering och numeriska beräkningar med Matlab.

Ansvarig: Katarina Blom , tel 772 10 97.
Telefonvakt under tentan: Katarina Blom, ankn 1097 Plats: L
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Betygsgränser: 16-23 p. ger betyget 3, 24-31 p. ger betyget 4 och 32 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 40.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 Låt $g(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2+1} - \dfrac{x\sin(x)}{x^2+2}$.

(a) Funktionen har ett nollställe på intervallet $[2,3]$. Skriv en sekvens i Matlab som bestämmer nollstället. Använd `fzero`. (3p)

(b) Om man vill bestämma derivatan till en funktion f numeriskt kan man använda approximationen (2p)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

där h är ett litet tal. Skriv en sekvens i Matlab som bestämmer ett värde på derivatan $g'(a)$ där a är nollstället som du bestämde i (a)-uppgiften. Använd derivataapproximationen ovan. Låt $h = 0.001$.

(c) Skriv en funktion i Matlab som beräknar en approximation till derivatan för en funktion enligt metoden i (b). Låt funktionen heta `min_derivata` och låt den ha tre inparametrar, funktionen som ska deriveras och värden på `x` och `h`. (3p)

(d) Skriv en sekvens i Matlab som beräknar nollstället till funktionen $g(x) = 0$ på intervallet $[2,3]$ med Newtons metod. Använd inte $g'(x)$ utan använd istället funktionen `min_derivata` för att beräkna ett approximativt värde på derivatan i varje iteration. (Låt $h = 0.001$). (5p)

(a)
```
g=@(x)1./((x-5).^2+1)-x.*sin(x)./(x.^2+2);
a = fzero(g,2.5);
```
(b)
```
h=0.001;
gp=(g(a+h)-g(a))/h  % a från fzeroanropet i (a)
```
(c)
```
min_derivata=@(f,x,h)(f(x+h)-f(x))/h;
```
(d)
```
x = 2.5; h = 0.001;
for i = 1:10
  k = -g(x)/min_derivata(g,x,h);
  x = x+k;
end
disp(x)
```

---

2 (a) Formulera (beskriv) höger rektangelregel för approximation av en integral (3p)
$$\int_a^b f(x)dx$$

(b) Skriv en sekvens i Matlab som beräknar en approximation av integralen (3p)

$$\int_0^1 x^3 - \cos(4x)dx$$

Använd höger rektangelregel och dela in integrationsintervallet i 30 delar.

(c) Låt $C(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi t^2}{2})dt$. Skriv en sekvens i Matlab som ritar en figur av $C(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. (3p)

(a) Se litteraturen.

(b)
```
f = @(x)x.^3 - cos(4*x);
n = 30;
x = linspace(0,1,n+1);
h = 1/n;
q = sum(h*f(x(2:n+1)));
```

(c)
```
f = @(t)cos(pi*t.^2)/2;
x = linspace(0,3);
for i = 1:100
  C(i) = integral(f,0,x(i));
end
plot(x,C)
```

---

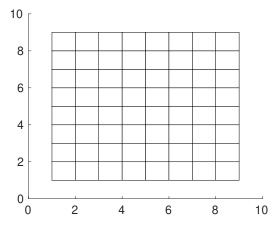
3 Matlabkoden nedan ritar ett rutnät med 8×8 rutor:

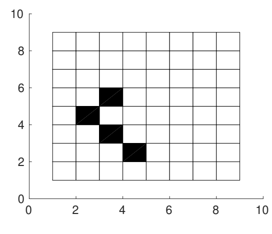
```
figure; hold on;
for i = 1:8
    for j = 1:8
        fill([i i+1 i+1 i],[j j j+1 j+1],'white');
    end
end
```

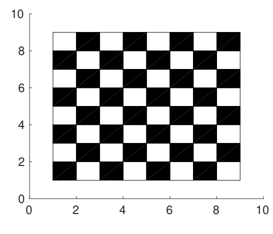
Rutnätet visas i bilden till vänster nedan.

(a) Skriv ett program som låter användaren klicka upprepade gånger i rutnätet. Om rutan användaren klickar på är vit ska den bli svart, om den är svart ska den bli vit. Mittenbilden nedan visar hur figuren kan se ut efter att användaren klickat i figuren några gånger. (7p)

(b) Skriv programmet så att det avslutas om användaren har klickat in ett schackbräde, dvs. om användaren klickat in svarta och vita rutor så att de bildar mönstret i den högra figuren nedan. (3p)







(a) och (b).

```
figure; hold on;
for i = 1:8
    for j = 1:8
        fill([i i+1 i+1 i],[j j j+1 j+1],'white');
    end
end
A = ones(8); % 1 betecknar vit ruta, -1 svart ruta
F = ones(8); % F innehåller rutmönstret för slutvillkor
F(2:2:end,2:2:end) = -1;
F(1:2:end,1:2:end) = -1;
while 1
  [x,y,a]=ginput(1);
  x = floor(x); y = floor(y);
  if A(x,y) == 1
    fill([x x x+1 x+1],[y y+1 y+1 y],'black');
    A(x,y) = -1;
  elseif A(x,y) == -1
    fill([x x x+1 x+1],[y y+1 y+1 y],'white');
    A(x,y) = 1;
  end
  sluta = all(all(A==F));
  if sluta
    break;
  end
end
```

---

4 Låt

$$\begin{cases} u'(t) = -4u(t) + 5\cos(t), t \in [0, 0.5] \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Skriv en sekvens i Matlab som löser begynnelsevärdesproblemet ovan. Använd `ode45`. (2p)

(b) Beräkna utifrån svaret från (a) ett ungefärligt värde på t där funktionen $u(t)$ når sitt största värde på intervallet. (Använd t.ex. kommandot `max`). (3p)

(c) Låt (3p)

$$\begin{cases} y'''(t) = -4y(t) + 4y'(t), t \in [0, 0.5] \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 5; \end{cases}$$

Skriv om begynnelsevärdet till ett system av första ordningen. Använd sedan `ode45` och bestäm en lösning till $y(t)$ på intervallet. Rita en graf för $y(t)$ (Bara $y(t)$, inte $y'(t)$ eller $y''(t)$).

(a)
```
f = @(t,u)-4*u+5*cos(t);
[t,U] = ode45(f,[0,0.5],1);
```

(b)
```
[ma,plats] = max(U);
svar = t(plats);
```

(c) Låt $\begin{cases} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \\ u_3(t) = y''(t) \end{cases}$. Vi får $\begin{cases} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_3(t) \\ u_3'(t) = -4u_1(t) + 4u_2(t) \\ u_1(0) = 1, u_2(0) = -1, u_3(0) = 5 \end{cases}$

I Matlab:

```
f=@(t,u)[u(2);u(3);-4*u(1)+4*u(2)];
[t,U]=ode45(f,[0,0.5],[1;-1;5]);
plot(t,U(:,1));
```