Sats: Givet en likformig indelning av intervallet $a \le x \le b$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

med delintervallbredd $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.
För vänster rektangelregel

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, h$$

gäller att

$$\int_a^b f(x)\, dx = L_n + \frac{b-a}{2} f'(\zeta)\, h, \quad \text{där } a \le \zeta \le b.$$

Bevis: Taylorutveckling runt $x = x_{i-1}$ ger

$$f(x) = f(x_{i-1}) + f'(\xi_i)(x - x_{i-1})$$

Integration ger

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = f(x_{i-1})\, h + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_{i-1})\, dx =^{1}$$

$$= f(x_{i-1})\, h + f'(\zeta_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, dx = f(x_{i-1})\, h + \frac{f'(\zeta_i)}{2}\, h^2$$

där $x_{i-1} \le \zeta_i \le x_i$.
Här utnyttjade vi att $\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})\, dx = \frac{1}{2}\,(x_i - x_{i-1})^2 = \frac{1}{2}\, h^2$.
Vi får följande

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\, h + \sum_{i=1}^{n} \frac{f'(\zeta_i)}{2}\, h^2 =$$

$$= L_n + \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f'(\zeta_i) \right) h = L_n + \frac{b-a}{2} f'(\zeta)\, h, \quad a \le \zeta \le b.$$

[1]Integralkalkylens generaliserade medelvärdessats: $\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\zeta) \int_a^b g(x)\, dx$ med $a \le \zeta \le b$, om f är kontinuerlig och g inte växlar samt är styckvis kontinuerlig.

Sats: Givet en likformig indelning av intervallet $a \leq x \leq b$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

med delintervallbredd $h = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

För mittpunktsmetoden

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\, h, \quad m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

gäller att

$$\int_a^b f(x)\, dx = M_n + \frac{b-a}{24} f''(\zeta)\, h^2, \;\text{ där } a \leq \zeta \leq b.$$

Bevis: Taylorutveckling runt $x = m_i$ ger

$$f(x) = f(m_i) + f'(m_i)(x - m_i) + \frac{f''(\xi_i)}{2}(x - m_i)^2$$

Integration ger

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = f(m_i)\, h + f'(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)\, dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f''(\xi_i)}{2}(x - m_i)^2\, dx =$$

$$= f(m_i)\, h + f'(m_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)\, dx + \frac{f''(\zeta_i)}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)^2\, dx$$

där $x_{i-1} \leq \zeta_i \leq x_i$.

Nu gäller att $\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)\, dx = 0$ och $\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - m_i)^2\, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}\, h^3$ så vi har

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\, h + \sum_{i=1}^{n} \frac{f''(\zeta_i)}{24}\, h^3 =$$

$$= M_n + \frac{b-a}{24} f''(\zeta)\, h^2, \quad a \leq \zeta \leq b.$$