Grupparbete 1

1. Bestäm alla (reella) p sådana att ekvationen

$$x^2 + 2x + \frac{1}{\cos^2(p \cdot 180^\circ)} = 0$$

har minst en reell rot.

Frågor att fundera över: Vad är lösningens idé? Vilka egenskaper hos de involverade funktionerna bygger den på? Hur kan man variera uppgiften?

2. För att avbilda Rubiks kub behöver man dela en kvadrats sida i tre lika delar (även i perspektiv). Man kan t.ex. använda följande metod: drag en sträcka mellan ett av hörnen och mittpunkten till en av de sidor som inte innehåller det hörnet; drag den diagonal som skär sträckan. Projicera (ortogonalt) skärningspunkten på sidan (egentligen på vilken som helst av sidorna). Projektionen delar då sidan i förhållande $2 : 1$. Visa att det verkligen är så! (*Vad har saken med perspektiv att göra? Hur hittar man sidornas mittpunkter på ett sätt som även fungerar i perspektiv?*)

3. Talet x bildas genom att man på ett godtyckligt sätt blandar siffrorna i 111 exemplar av talet 2000. Visa att x inte är kvadraten till något heltal.

Lösning: Summan av siffrorna i talet x är $111 \cdot 2 = 222$. Det medför att x är delbart med 3, men inte med 9 och x kan därmed inte vara kvadraten till något heltal.

Frågor att fundera över: På hur många olika sätt kan man bilda talet x? Vad är lösningens idé? Kan du visa de påståenden som används? Hur kan man variera uppgiften? Kan du se en alternativ lösning? Är den realistisk (vad betyder det)?

4. *Den svaga länken, eller den lösa tråden:* En problemlösningsstrategi är att man bildligt talat försöker hitta en liten lös trådbit i problemformuleringen som man kan börja dra i. Ofta är det så att man inte ser hur lösningen kommer att gå vidare, men man fokuserar hela tiden på de slutsatser man kan dra för tillfället. Försök hitta en "lös tråd" i uppgiften nedan!

(Svår uppgift!) Sträckorna AM, BH och CL är respektive median från A, höjd från B, och bisektris från C i triangeln ABC. Givet att $\triangle MHL$ är liksidig, visa att $\triangle ABC$ också är liksidig.

Delas ut må 30 januari 2012, presenteras fredagen den 3 februari 2012.