

GEOMETRI
av
OLOF HANNER

Göteborg 1980

Kapitel 4. Geometri 85

- 4.1 Axiomatik för euklidisk geometri byggd på vektorer 86
- 4.2 Axiom för absolut geometri 90
- 4.3 Längd i absolut geometri 92
- 4.4 Vinklar i absolut geometri 94
- 4.5 Kongruenta trianglar i absolut geometri 96
- 4.6 Parallella linjer och vinkelsumma i trianglar 99
- 4.7 Euklidisk geometri: likformighet och Pytagoras' sats 104
- 4.8 Kleins modell för icke-euklidisk geometri 109
- 4.9 Icke-euklidisk geometri i Kleins modell 114
- 4.10 Area i euklidisk geometri 118
- 4.11 Area och defekt i icke-euklidisk geometri 125
- 4.12 Klassiska satser i euklidisk geometri 128
- 4.13 Konstruktion med passare och linjal 136

Appendix 1. Uppräkneliga mängder 138

Appendix 2. Definition av grupp och transformationsgrupp 139

Appendix 3. Bevis för satserna F1 och F2 140

Appendix 4. Några satser i sfärisk geometri 142

Problem till kapitel 1

- Utsagologiken (avsnitt 1.1 - 1.9) 145
- Predikatslogiken (avsnitt 1.10 - 1.15) 145
- Blandade problem 146

Problem till kapitel 3

- Induktion (avsnitt 3.1) 148
- Rationella och reella tal (avsnitt 3.4 - 3.9) 149

Problem till kapitel 4

- Absolut geometri (avsnitt 4.2 - 4.6) 150
- Icke-euklidisk geometri i Kleins modell (avsnitt 4.8, 4.9) 151
- Area i icke-euklidisk geometri (avsnitt 4.11) 151
- Euklidisk geometri (avsnitt 4.7, 4.10, 4.12) 152
- Euklidisk geometri. konstruktioner (avsnitt 4.13) 153

Index 155

Kapitel 4. GEOMETRI

Vi skall studera geometri med tre huvudsyften: att lägga ordentliga grundvalar för euklidisk geometri, att bevisa vissa klassiska satser inom denna geometri och att studera denna geometris förhållande till icke-euklidisk geometri och därvid diskutera parallellaxiometets ställning.

I många matematiska sammanhang används resultat och argument hämtade från den euklidiska geometrin. Det är därför av intresse att ha ordentliga grundvalar för denna. Enklast når man detta mål genom att ge en axiomatik i anslutning till teorin för lineära rum. Vi skall ge en sådan axiomatik.

Vi skall emellertid också ge en annan axiomatik närmare Euklides' egen uppläggning av geometrin. I sitt berömda verk "Elementa" gav Euklides en systematisk (men inte invändningsfri) framställning av geometrin. Ett av hans axiom är det berömda parallellaxiomet. Euklides dröjde i sin framställning med att utnyttja detta axiom. Sålunda visade han först utan axiomet att summan av två vinklar i en triangel är mindre än två rätta och senare, med axiomet, att summan av alla tre vinklarna i en triangel är två rätta. Genom att dröja med att använda parallellaxiomet gav Euklides första fröet till den diskussion om parallellaxiometets ställning som i sinom tid ledde till den icke-euklidiska geometrin, en geometri där parallellaxiomet inte gäller utan är ersatt med ett annat axiom om parallella linjer.

Den som först gav ett väsentligt bidrag till denna diskussion var Saccheri (1667 - 1733). Han försökte bevisa att parallellaxiomet följde ur de övriga axiomen. Man kan bevisa (se avsnitt 4.6) att parallellaxiomet är ekvivalent med satsen att vinkelsumman i en triangel är två rätta. Saccheri antog motsatsen och studerade de båda fallen då vinkelsumman är mindre än två rätta resp. större än två rätta. Han fann i båda fallen en motsägelse. Beviset för omöjligheten av en vinkelsumma mindre än två rätta var emellertid inkorrekt; han stödde sig på en egenskap ekvivalent med parallellaxiomet. Alla senare försök att bevisa omöjligheten av en vinkelsumma mindre än två rätta visade sig fruktlösa.

Detta var ställningen till början av 1800-talet då Gauss, Bolyai och Lobachevskii oberoende av varandra började studera hur en geometri skulle se ut i vilken vinkelsumman i en triangel verkligen är mindre än två rätta. Sålunda skapades den icke-euklidiska geometrin. Man hade alltså inte längre en geometri utan flera geometrier. Vi kommer att ge

den icke-euklidiska geometrin med en axiomatik, men vi kommer att studera dess egenskaper i en modell, given av F. Klein 1871.

Den del av geometrin som Euklides utvecklade utan hjälp av parallellaxiomet brukar kallas den absoluta geometrin. Vi ger en axiomatik för denna geometri och får sedan de två geometrierna, den euklidiska och den icke-euklidiska, genom att lägga till olika axiom om parallella linjer. För enkelhets skull väljer vi en axiomatik i vilken vi förutsätter de reella talen som bekanta. Vi nöjer oss med "plan" geometri (dvs det finns två "sidor" om varje linje).

Vår framställning av absolut geometri har betydelse även om vi endast intresserar oss för euklidisk geometri. Ty även om vi grundlägger euklidisk geometri med vektorer, kan vi använda satserna i den absoluta geometrin. Allt som behövs är att vi visar att vår startpunkt för den absoluta geometrin (axiomen) gäller i den med vektorer grundlagda geometrin. Speciellt användbara är satserna om kongruenta trianglar (se avsnitt 4.5). Vissa klassiska satser inom den euklidiska geometrin är svåra att bevisa direkt med vektorer eller koordinater, men erhålles lätt med kongruensläran. Detta gäller framförallt satser som handlar om vinklar som är lika men som inte erhålles från varandra genom parallellförskjutning. I ett sista avsnitt skall vi ge några sådana satser och några andra klassiska satser inom den euklidiska geometrin.

4.1 Axiomatik för euklidisk geometri byggd på vektorer

Teorin för lineära rum ger en möjlighet att snabbt grundlägga euklidisk geometri. Vi kan helt enkelt som grund ta ett lineärt rum med skalär produkt. Emellertid kommer därvid origo att bli en speciell, genom axiomen särpräglad punkt. För att undvika detta väljer vi att starta med två grundbegrepp, både punkter och vektorer. Dessa måste knytas samman med några axiom. Det visar sig därvid att några av axiomen för lineärt rum kan slopas.

Vi utgår alltså från två mängder. Elementen i den ena kallas punkter, elementen i den andra kallas vektorer. För dessa skall finnas 4 kompositioner:

- a) för en punkt A och en vektor u finns en punkt B för vilken vi säger att vektorn u går (eller är avsatt) från A till B ,
- b) för två vektorer u och v finns en vektor $u + v$ kallad deras summa,

c) för ett (reellt) tal λ och en vektor u finns en vektor λu kallad produkten av λ och u ,

d) för två vektorer u och v finns ett reellt tal $(u|v)$ kallat den skalära produkten av u och v .

Dessa kompositioner skall uppfylla ett antal axiom. Vi uppdelar dem i fyra grupper A, B, C och D.

Grupp A fastställer samspillet mellan punkter och vektorer.

A1) I sambandet "u går från A till B" kan två av u , A, B väljas godtyckligt; den tredje existerar då och är entydigt bestämd.

Vi använder beteckningen $\vec{AB}$ för vektorn från A till B.

A2) Om $u = \vec{AB}$ och $v = \vec{BC}$, så är $u + v = \vec{AC}$.

Grupp B består av 4 axiom.

För godtyckliga vektorer u , v och godtyckliga tal λ, μ skall gälla:

$$B1) 1u = u$$

$$B2) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$$

$$B3) \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$$

$$B4) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

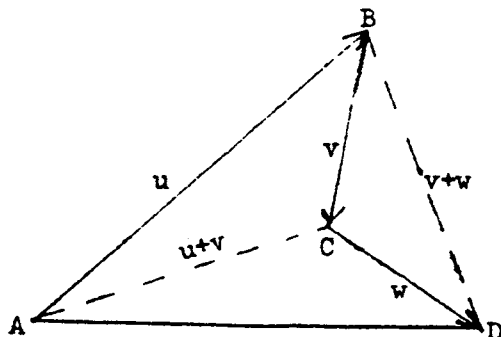
Dessa axiom räcker för att visa att vektorerna bilda ett lineärt rum. Från dem kan vi nämligen bevisa återstående axiom för lineärt rum, B5) - B7).

Sats. B5) $(u + v) + w = u + (v + w)$,

B6) $0u$ är samma vektor för varje u . Vi betecknar den 0 och har $u + 0 = u$ för varje u ,

B7) $u + v = v + u$ för två godtyckliga vektorer u , v .

Bevis. Tag en punkt A. Välj B, C, D så att $u = \vec{AB}$, $v = \vec{BC}$,



$w = \vec{CD}$. Då är $(u + v) + w = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ och $u + (v + w) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$. Detta visar B5). Vi kan därför skriva $u + v + w$ utan parenteser, vilket lätt utvidgas till summor med flera termer.

Tag en punkt A och en vektor u . Låt $u = \vec{BA}$ och antag att $0u = \vec{AA}_1$. Då är

$$\vec{BA} = u = 1u = (1 + 0)u = 1u + 0u = \vec{BA} + \vec{AA}_1 = \vec{BA}_1$$

På grund av axiom A1) är då $A = A_1$ så att $0u = \vec{AA}$. Vektorn $\vec{AA}$ är oberoende av u . Med beteckningen $0 = \vec{AA}$ har vi visat $u + 0 = u$. Detta visar B6). Sätter vi $u = \vec{AC}$ får vi också från $\vec{AA} + \vec{AC} = \vec{AC}$ att $0 + u = u$. (Vi har ännu inte bevisat B7).

Låt $-u$ beteckna $(-1)u$. Vi har då:

$$u + (-u) = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = 0$$

$$(-u) + u = (-1)u + 1u = ((-1) + 1)u = 0u = 0$$

Från en likhet $u + v = u + w$ kan vi nu sluta $v = w$, dvs vi kan stryka u . Ty $u + v = u + w$ medför

$$(-u) + u + v = (-u) + u + w$$

$$0 + v = 0 + w$$

$$v = w$$

Likaså kan vi stryka u i en likhet $v + u = w + u$.

För en godtycklig vektor u har vi

$$2u = (1 + 1)u = 1u + 1u = u + u$$

Detta ger

$$2(u + v) = u + v + u + v$$

men också, på grund av B4)

$$2(u + v) = 2u + 2v = u + u + v + v$$

Alltså är

$$u + v + u + v = u + u + v + v$$

Genom att stryka u till vänster och v till höger får vi

$u + v = v + u$, dvs B7) är bevisad (jfr fig). Bev.

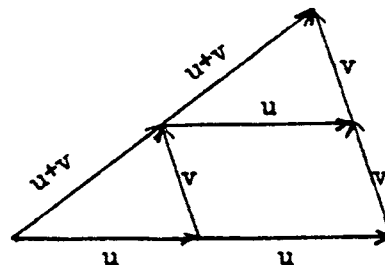
Man ser lätt att en vektorekvation

$u + x = v$ har en entydigt bestämd lösning $x = v + (-u)$, vilken också kan skrivas $v - u$.

Mängden av vektorer säges vara genererad av vektorerna $e_1, \dots, e_n$ om varje vektor kan skrivas som en lineärkombination $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ av dessa. För att få en geometri i ett plan tar vi följande axiom.

C) Mängden av vektorer genereras av 2 vektorer men inte av 1 vektor.

TVå vektorer, e_1, e_2 som genererar sägs vara en bas. Om e_1, e_2 är en bas kan en vektor u skrivas $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$, där u_1 och u_2 är



entydigt bestämda tal, kallade koordinater för u .

Sista gruppen av axiom handlar om skalära produkten.

$$D1) (u|v) = (v|u)$$

$$D2) (u|v + w) = (u|v) + (u|w)$$

$$D3) (u|\lambda v) = \lambda(u|v)$$

$$D4) u \neq 0 \iff (u|u) > 0.$$

Vi definierar längden $|u|$ av en vektor u som det tal, större än eller likamed 0, som satisfierar $|u|^2 = (u|u)$. En vektor av längden 1 kallas en enhetsvektor eller en normerad vektor. Med avståndet mellan två punkter menas längden av vektorn från den ena punkten till den andra.

Två vektorer u, v för vilka $(u|v) = 0$ sägs vara ortogonala.

Man kan välja en bas med två ortogonala, normerade vektorer, en s.k.

ortonormerad bas, förkortat ON-bas. Ty om f_1, f_2 är en bas kan man ta

$$e_1 = \frac{f_1}{|f_1|} \quad e_2 = \frac{f_2 + \lambda f_1}{|f_2 + \lambda f_1|}$$

där λ väljs så att e_1 och e_2 blir ortogonala.

Låt nu e_1, e_2 vara en ON-bas. För två vektorer

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2, v = v_1 e_1 + v_2 e_2$ är då

$$\begin{aligned} (u|v) &= (u_1 e_1 + u_2 e_2 | v_1 e_1 + v_2 e_2) = \\ &= u_1 v_1 (e_1|e_1) + u_1 v_2 (e_1|e_2) + u_2 v_1 (e_2|e_1) + u_2 v_2 (e_2|e_2) = \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 \end{aligned}$$

Speciellt

$$|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Koordinater för punkter erhåller man genom att välja en punkt O , kallad origo, och för varje punkt P ta koordinaterna för vektorn $\vec{OP}$, den s.k. ortsvektorn. Origo och en bas sammanfattas i benämning koordinat-system. Om basen är en ON-bas kallas koordinatsystemet ett ON-system.

Vi definierar en linje som en punktmängd

$$\{P; \vec{P_0 P} = t e \text{ för något tal } t\}$$

där P_0 är en punkt och $e \neq 0$ en vektor. Man får samma linje om man i stället för P_0 tar en godtycklig punkt på linjen eller i stället för e tar en godtycklig vektor mellan två punkter på linjen.

Med en kongruenstransformation avses en avbildning av mängden av punkter på sig själv som är av första graden och bibehåller avstånd. I ett ON-system ges den av $(x, y) \mapsto (x_1, y_1)$ där

$$x_1 = ax + cy + e$$

$$y_1 = bx + dy + f$$

För att avstånd skall bibehållas måste därvid

$$(ax + cy)^2 + (bx + dy)^2 = x^2 + y^2$$

för varje x och y . Detta krav kan skrivas $a^2 + b^2 = 1$,
 $c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$, vilket också kan uttryckas med att matrisen
 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ är en ortogonalmatris, dvs antingen $a^2 + b^2 = 1$, $c = -b$,
 $d = a$ eller $a^2 + b^2 = 1$, $c = b$, $d = -a$.

Man konstaterar lätt att även skalära produkten är oförändrad vid kongruenstransformationer.

För att besvara frågan om axiomens motsägelsefrihet ger vi en modell byggd på talpar. Vi låter mängden av punkter vara mängden av par av reella tal. Vi låter mängden av vektorer vara samma mängd. De 4 kompositionerna ges av:

- a) vektorn (u_1, u_2) avsatt från punkten (a_1, a_2) går till
 $(a_1 + u_1, a_2 + u_2)$
- b) $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
- c) $\lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$
- d) $((u_1, u_2) | (v_1, v_2)) = u_1 v_1 + u_2 v_2$

Man verifierar lätt axiomen i de 4 axiomgrupperna. Av denna modell följer att en eventuell motsägelse mellan dessa axiom skulle ge en motsägelse inom teorin för talpar.

4.2 Axiom för absolut geometri

Vi ger en axiomatik för absolut geometri (= "geometri utan parallell-axiom").

Vi har följande begrepp:

- a) en mängd av element kallade punkter,
- b) en mängd av element kallade linjer,
- c) en relation mellan punkt och linje; vi säger att punkten ligger på linjen eller att linjen går genom punkten,
- d) för punkterna på en linje två ordningsrelationer, varav den ena är den motsatta till den andra,
- e) en mängd av avbildningar av mängden av punkter på sig själv kallade kongruenstransformationer (även kallade förflyttningar).

Dessa skall uppfylla 4 axiom.

ABS 1) För två olika punkter finns en och endast en linje genom punkterna.

Linjen genom punkterna A och B benämns linjen AB . ABS 1) medför att två olika linjer kan ha högst en punkt gemensam, kallad linjernas skärningspunkt. Två linjer som inte råkas kallas parallella.

ABS 2) Mängden av punkter på en linje är med endera ordningsrelationen isomorf med den ordnade mängden av reella tal.

Bl.a. går varje linje genom oändligt många punkter. Varje punkt på en linje delar linjen i två delar. Var och en av dessa kallas en stråle. De båda strålarna som en punkt delar en linje i, kallas motsatta. Vanligen räknas delningspunkten till båda strålarna. Den kallas strålarnas utgångspunkt. Strålen från en punkt A (= med A som utgångspunkt) genom B benämns strålen AB .

Av tre olika punkter på en linje ligger alltid en mellan de båda andra. Två olika punkter A och B på en linje och alla punkter mellan dem kallas sträckan AB . A och B kallas sträckans ändpunkter.

ABS 3) De punkter som inte ligger på en linje L kan indelas i två icke-tomma delmängder kallade L 's sidor. Två punkter ligger på samma sida om L om och endast om sträckan mellan dem inte skär L .

ABS 4) a) En kongruenstransformation överför punkterna på en linje i punkterna på en linje (dvs en linje överförs i en linje),
 b) en kongruenstransformation bibehåller eller omkastar ordningsföljden mellan punkterna på en linje,
 c) mängden av kongruenstransformationer bildar en grupp under komposition (se Appendix 2),
 d) om A, B, C är tre punkter som inte ligger i linje och A_1, B_1, C_1 är tre punkter som inte ligger i linje finns en och endast en kongruenstransformation som överför A i A_1 , strålen AB i strålen A_1B_1 och C i en punkt på samma sida om linjen A_1B_1 som C_1 .

På grund av a) och b) måste två punkter och sträckan mellan dem avbildas i två punkter och sträckan mellan dem. Därför måste punkterna på samma sida (olika sidor) om en linje avbildas på punkter på samma sida (olika sidor) om bildlinjen. c) innebär att inversen till en kongruenstransformation är en kongruenstransformation och att två kongruenstransformationer utförda efter varandra ger en kongruenstransformation.

Två figurer (= punktmängder) kallas kongruenta om det finns en kongruenstransformation som överför den ena i den andra. Att kongruenstransformationerna bildar en grupp medför att kongruens är en ekvivalensrelation.

En linje och ena sidan om linjen kallas ett halvplan.

Ovanstående axiom fastlägger den absoluta geometrin. För att visa att dessa axiom inte motsäger varandra ger vi två modeller.

Den första modellen är den geometri, den euklidiska, som beskrevs i föregående avsnitt. Om vi inför ett ON-system kan punkter och vektorer beskrivas med talpar. En linje kan ges med en ekvation $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Ordningsföljden mellan punkterna på linjen ges av x eller av y . De två sidorna om en linje ges av $ax + by + c > 0$ resp $ax + by + c < 0$. Man bevisar lätt ABS 1) - ABS 4). Existensen och entydigheten i ABS 4)d) följer lätt om $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$. Man kan då välja (e, f) i

$$x_1 = ax + cy + e$$

$$y_1 = bx + dy + f$$

så att A överförs i A_1 , välja (a, b) så att strålen AB överförs i strålen A_1B_1 och slutligen välja tecknet på (c, d) så att C överförs i en punkt på samma sida om linjen A_1B_1 som C_1 . Det allmänna fallet följer lätt från detta specialfall.

Den andra modellen är Kleins modell för icke-euklidisk geometri. Vi ger denna i ett sammanhang i avsnitt 4.8. Vi uppmanar emellertid läsaren att redan nu göra sig förtrogen med vad punkt, linje, ordningsrelation och kongruenstransformation betyder i denna modell.

4.3 Längd i absolut geometri

Vi skall diskutera längdbegreppet. Vi behöver då följande sats.

F1 Sats. En sträcka är inte kongruent med en del av sig själv.

(Med "del" menar vi äkta delmängd.)

Denna sats följer från axiomen. Den beror på entydigheten i ABS 4)d) som innebär att vi inte har "för många" kongruenstransformationer. Vi avstår emellertid från att genomföra beviset för denna sats liksom beviset för motsvarande sats om vinklar, F2. (För fullständighets skull ger vi bevisen i Appendix 3.) Euklides har ett motsvarande axiom "Det hela är större än sina delar" som han utan diskussion tillämpar på sträckor, vinklar och areor. (Jfr exemplen givna i avsnitt 2.6 i vilka inte "det hela är större än sina delar".)

Antag att A, B, C inte ligger i linje. Den kongruenstransformation som överför A i sig, strålen AB i sig och C i en punkt på motsatta sidan om linjen AB måste enligt F1 överföra B i sig. Då B är en valfri punkt på strålen (utom A) måste varje punkt på strålen ligga stilla vid denna kongruenstransformation. Då den motsatta strålen också övergår i sig själv, måste även dess punkter ligga stilla. Vi kallar denna kongruenstransformation spiegling i linjen AB .

Antag åter att A, B, C inte ligger i linje. Låt T vara den kongruenstransformation som överför A i B , strålen AB i strålen BA och C i en punkt C_1 på andra sidan om AB . T måste på grund av $F1$ överföra B i A . $T \circ T$ överför då A i A , B i B och C i en punkt C_2 på samma sida om AB som C . På grund av entydigheten i $ABS 4)d$ måste $T \circ T$ vara den identiska avbildningen (den som överför varje punkt i sig själv). Alltså är $C_2 = C$ och T överför C_1 i C . Skärningspunkten P mellan linjerna AB och CC_1 övergår då genom T i skärningspunkten mellan linjerna BA och C_1C , dvs i sig själv. Sträckorna AP och BP är alltså kongruenta. Från $F1$ följer lätt att det finns endast en sådan punkt P och att den ligger mellan A och B . P delar sträckan AB i två kongruenta delar. Vi kallar den mittpunkten på sträckan AB .

Längd av en sträcka anger dess storlek i förhållande till en annan sträcka. Två sträckor skall därvid vara lika stora, ha samma längd, om de är kongruenta. En sträcka AB anses vara mindre än en sträcka CD , om AB är kongruent med en del av CD .

För att jämföra två sträckor flyttar vi dem genom kongruenstransformationer så att de blir sträckor AB och AC på samma stråle från en punkt A .

Låt därför A och B vara två olika punkter. På strålen AB tar vi successivt $B_0 = A, B_1 = B, B_2, B_3, \dots$ sådana att varje sträcka $B_{i-1}B_i$ är kongruent med AB och $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$ är ordnade på detta sätt på linjen. Detta går på endast ett sätt på grund av $F1$.

Vi visar först att varje punkt på strålen ligger på någon av dessa sträckor B_iB_{i+1} . Punkterna på strålen är ordnade som de icke-negativa reella talen. Om mängden av alla B_i vore begränsad så skulle det finnas en punkt C som vore dess supremum. Avsätt sträckan AB från C på linjen AB i riktning mot A , säg sträckan CD . Då C är minsta majoranten, måste D ligga på någon sträcka $B_{i-1}B_i$ och därför C på sträckan B_iB_{i+1} , vilket innebär en motsägelse.

Låt därefter $B_{1/2}$ vara mittpunkten på sträckan B_0B_1 , allmänt $B_{i+1/2}$ mittpunkten på sträckan B_iB_{i+1} . Låt vidare $B_{1/4}, B_{3/4}, \dots$ vara mittpunkterna på sträckorna $B_0B_{1/2}, B_{1/2}B_1, \dots$. Genom successiv uppdelning får vi B_a definierad för varje tal $a = p/2^n$ där p, n är heltal, $p \geq 0, n \geq 0$.

Vi konstaterar sedan att för varje punkt $C \neq A$ på strålen finns ett B_a mellan A och C . Låter vi nämligen B och C byta roller, visar vårt resonemang ovan att ett ändligt antal exemplar av AC

$(AC, CC_2, C_2C_3, \dots, \text{alla kongruenta})$ täcker sträckan AB , säg 2^m exemplar, så att B ligger på sträckan AC_{2^m} . Då ligger $B_{2^{-m}}$ på sträckan AC .

Vi kallar a koordinaten för punkten B_a och definierar allmänt koordinaten för en punkt C på strålen som

$$\sup \{a; B_a \text{ på sträckan } AC\}$$

Man kan lätt konstatera att varje icke-negativt tal blir koordinat för en punkt på strålen och omvänt. Ordningen mellan koordinaterna svarar mot ordningen mellan punkterna på strålen.

Då AB och AC är sträckor på samma stråle från A låter vi $\frac{AC}{AB}$ beteckna C 's koordinat då AB tas som grund för koordinater. $\frac{AC}{AB}$ utläses förhållandet mellan AC och AB . Man kan visa (detaljerna överlåtes åt läsaren) att om D också ligger på strålen så är

$$\frac{AC}{AB} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad (*)$$

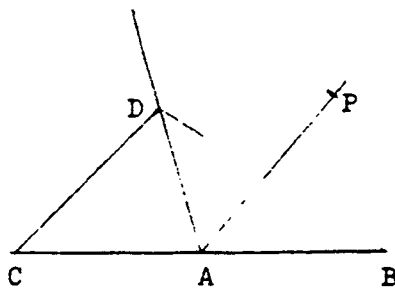
Tar vi någon sträcka som enhetssträcka menar vi med en sträckas längd dess förhållande till enhetssträckan. Längden av sträckan AB betecknar vi $|AB|$. Enligt $(*)$ är förhållandet mellan två sträckor lika med förhållandet mellan deras längder. I stället för kongruenta sträckor kan vi säga lika långa sträckor.

Det följer av det sätt på vilket längd är införd att om C är en punkt på sträckan AB så är $|AC| + |CB| = |AB|$.

4.4 Vinklar i absolut geometri

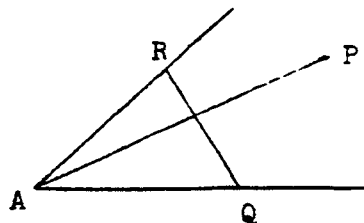
Låt AB och AC vara motsatta strålar och D och P två punkter på samma sida om linjen BC . Vi påstår att strålen AP skär sträckorna BD och CD i en och endast en punkt.

Linjen AP skär CB i A . Alltså ligger B, C på olika sidor om linjen AP . Om inte strålen AP är strålen AD måste D ligga på endera sidan om AP , säg på C 's sida. Då ligger B, D på olika sidor om AP så att sträckan BD skär linjen AP . Då skärningspunkten ligger på samma sida om linjen CB som D måste den ligga på strålen AP .



Punkterna på sträckorna BD och DC är tillsammans ordnade som punkterna på ett intervall av reella tal. Vi kan därför införa ordning mellan strålarna AP då P ligger på samma sida om BC som D . Med resonemang liknande det vi just genomfört visar man att denna ordnings-

relation är oberoende av valet av punkterna B, C på strålarna och av D i halvplanet. En stråle AP i halvplanet ligger mellan strålarna AQ och AR om sträckan QR skär strålen AP.



Två olika strålar AB och AC från en punkt A delar planet i två områden. Med en vinkel förstår vi två olika strålar AB, AC och alla strålar i ett av de två områdena. Punkten A kallas vinkelspetsen, strålarna AB och AC kallas vinkelbenen. Om AB och AC inte är motsatta ligger den ena vinkeln i ett halvplan. Denna kallar vi vinkeln BAC eller vinkeln CAB och betecknar den $\angle BAC$ eller $\angle CAB$. Då missförstånd inte kan befaras kan den även betecknas $\angle A$.

Vi inför storlek av vinkel på ungefär samma sätt som vi införde längd av sträcka. Vi utelämnar detaljerna men påpekar att vi måste ha samma utgångspunkt som för sträcka. Vi behöver följande sats.

F2 Sats. En vinkel är inte kongruent med en del av sig själv. Vi behöver också kunna dela en vinkel mitt itu; det räcker med en vinkel BAC i ett halvplan. F2 kan bevisas från axiomen, men vi avstår från att genomföra beviset här (se Appendix 3). För att dela en vinkel BAC mitt itu antar vi att AB och AC är lika långa. Den kongruenstransformation som överför A i A, strålen AB i strålen AC och C i en punkt på samma sida om AC som B, måste överföra B i C (AB och AC är lika långa), och C i B (på grund av F2 och av att AC och AB är lika långa). Mittpunkten P på sträckan BC ligger då stilla och $\triangle PAB$ är kongruent med $\triangle PAC$. Linjen AP kallas bisektris till $\angle BAC$. På grund av F2 är den entydig.

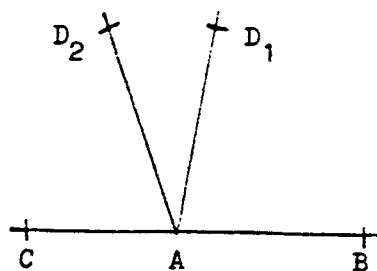
Därmed kan vi införa storlek av vinklar. Som enhet kan väljas den rätta vinkeln, som vi nu skall definiera.

Om AB och AC är motsatta strålar och AD ytterligare en stråle från A, kallas vinklarna BAD och CAD sidovinklar. En vinkel som är lika stor som sin sidovinkel kallas rät. Vi visar att alla rätta vinklar är lika stora. Antag motsatsen. Efter en kongruenstransformation har vi då två olika strålar AD_1 och AD_2 från A som båda bildar rätta vinklar med linjen CAB, D_1 och D_2 på samma sida om linjen CAB. Antag exempelvis att AD_1 ligger mellan AB och AD_2 . Då är (fig. nästa sida)

$$\angle CAD_2 < \angle CAD_1 = \angle BAD_1 < \angle BAD_2 = \angle CAD_2$$

vilket är en motsägelse. Att det finns rätta vinklar kan vi exempelvis

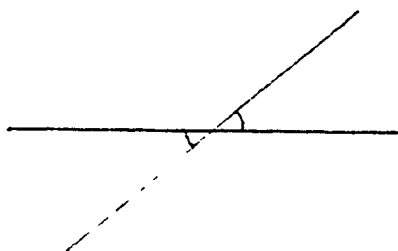
inse genom att spegla i en linje. En punkt P utanför en linje och dess spegelbild Q vid spegling i linjen ger en sträcka PQ som skär linjen med vinklar, som övergår i sina sidovinklar vid speglingen och därför måste vara räta.



En vinkel mindre än en rät vinkel kallas spetsig, en vinkel i ett halvplan större än en rät vinkel kallas trubbig.

Om man använder räta vinkeln som enhet kan man uttala exempelvis att summan av två sidovinklar alltid är $2R$ (= två räta). Speciellt gäller att sidovinklar till lika stora vinklar är lika stora.

Då två linjer skär varandra i en punkt uppstår 4 vinklar. Två av



vertikalvinklar

dessa som inte har något gemensamt vinkelben kallas vertikalvinklar. Eftersom två vertikalvinklar har gemensam sidovinkel är de lika stora.

Om ABC är en triangel kallas vinklarna vid A, B, C (dvs vinklarna BAC, ABC, ACB) för triangelns vinklar och ibland även triangelns innervinklar. Deras sidovinklar kallas yttervinklar.

Två linjer kallas normaler till varandra om de skär varandra under räta vinklar. Från en punkt P utanför en linje L finns en och endast en normal till L . Speglas P i L övergår P i en punkt Q . Linjen PQ är då normal. Omvänt måste en normal PA , där A ligger på L övergå i QA som är normal från Q mot linjen. Då båda sträckorna PA och QA bildar räta vinklar mot linjen utgör de delar av samma linje, linjen PQ . Punkten A är alltså den entydigt bestämda skärningspunkten mellan PQ och L . A kallas normalens fotpunkt.

4.5 Kongruenta trianglar i absolut geometri

När vi talar om kongruenta trianglar framhåller vi alltid en ordning mellan hörnen. Att en triangel ABC är kongruent med en triangel $A'B'C'$ betyder att den första triangeln kan flyttas (genom en kongruenstransformation) så att A flyttas till A' , B till B' , och C till C' . Man skriver detta $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Euklides bevisade 3 satser om kongruenta trianglar, de s.k. kongruensfallen. Det är brukligt att numrera dessa i den ordningsföljd de förekommer hos Euklides.

(Här börjar en numrering av satser som sträcker sig genom resten av kapitlet. Alla dessa numrerade satser gäller i euklidisk geometri, de i detta och nästa avsnitt givna även i absolut geometri.)

Sats 1. (Första kongruensfallet). Om i trianglarna ABC och $A'B'C'$ gäller $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ och $\angle A = \angle A'$, så är trianglarna kongruenta.

Bevis. (Fritt efter Euklides). Flytta triangeln ABC så att AB sammanfaller med $A'B'$ och C kommer att flyttas till en punkt C'' på samma sida om $A'C'$ som C' . Eftersom $\angle A = \angle A'$ kommer då $A'C'$ och $A'C''$ att falla utefter samma stråle från A' . Eftersom de är lika långa blir $C'' = C'$. Bev.

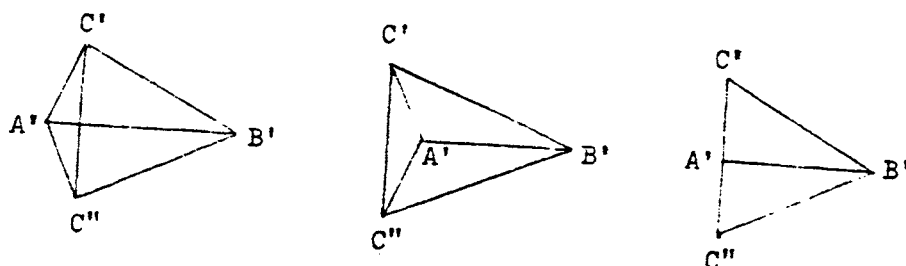
Speciellt är $|BC| = |B'C'|$ och $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Euklides' egen formulering av satsen framhåller endast dessa fakta.

Sats 2. (Basvinkelsatsen). I en likbent triangel är basvinklarna lika stora.

Bevis. Detta är ett specialfall av första kongruensfallet. Antag att vi i $\triangle ABC$ har $|AB| = |AC|$. Då är enligt första kongruensfallet $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ och alltså $\angle B = \angle C$. Bev.

Sats 3. (Andra kongruensfallet). Om i trianglarna ABC och $A'B'C'$ vi har $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ och $|BC| = |B'C'|$, så är trianglarna kongruenta.

Bevis. Flytta $\triangle ABC$ så att AB sammanfaller med $A'B'$ och C flyttas till en punkt C'' som ligger på den mot C' motsatta sidan av $A'B'$ (se fig). Drag $C'C''$. Antag först att varken A' eller B' ligger



på denna sträcka. Då är $\triangle A'C'C''$ och $\triangle B'C'C''$ likbenta. I var och en av dessa är basvinklarna lika stora. Genom att ta summan av lika vinklar (eller skillnaden då sträckan $C'C''$ inte skär sträckan $A'B'$) erhålles $\angle A'C'B' = \angle A'C''B'$ och trianglarna är kongruenta enligt första kongruens-

fallet. Om A' eller B' ligger på sträckan $C'C''$ går motsvarande bevis igenom med endast en likbent triangel. Bev.

Sats 4. (Tredje kongruensfallet). Om i trianglarna ABC och $A'B'C'$ gäller $|AB| = |A'B'|$, $\angle A = \angle A'$ och $\angle B = \angle B'$, så är trianglarna kongruenta.

Bevis. Flytta $\triangle ABC$ så att AB sammanfaller med $A'B'$ och C flyttas till en punkt C'' på samma sida om $A'B'$ som C' . På grund av $\angle A = \angle A'$ måste då $A'C'$ och $A'C''$ falla utefter samma stråle. Likaså faller $B'C'$ och $B'C''$ utefter samma stråle. Alltså måste C'' vara skärningspunkten mellan linjerna $A'C'$ och $B'C'$, dvs $C'' = C'$. Bev.

Sats 5. (Euklides). I en triangel är varje yttervinkel större än var och en av motstående innervinklar.

Bevis. Låt triangeln vara ABC och låt D ligga på AB 's förlängning över B .

Vi vill visa att

$\angle CBD > \angle C$. Låt P

vara mittpunkten på

sträckan BC . Förläng

AP över P till en punkt Q med $|PQ| = |AP|$. Då är trianglarna PCA och PBQ kongruenta och alltså är

$$\angle C = \angle PBQ < \angle PBD$$

Bev.

Sats 6. I en triangel är vinkeln stående mot en större sida större än vinkeln stående mot en mindre.

Bevis. Låt oss i $\triangle ABC$ ha $|AB| > |AC|$. Tag P på AB sådan

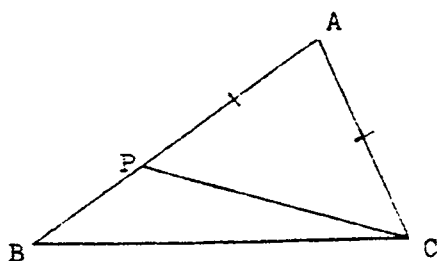
att $|AP| = |AC|$. Drag PC . Då är

$$\angle ACB > \angle ACP,$$

$$\angle ACP = \angle APC \text{ (likbent triangel),}$$

$$\angle APC > \angle ABC \text{ (yttervinkel och motstående innervinkel).}$$

Härav $\angle ACB > \angle ABC$, vilket skulle bevisas. Bev.



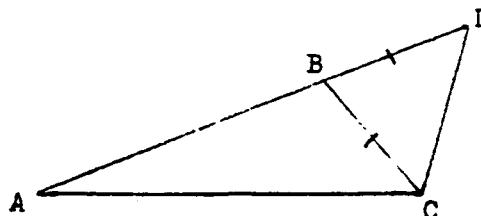
Sats 7. (Basvinkelsatsens omvändning). Om två vinklar i en triangel är lika så är motstående sidor lika.

Bevis. Ty om de vore olika skulle enligt föregående sats de två vinklarna inte vara lika. Bev.

Sats 8. (Triangelolikheten). Summan av längderna av två sidor i en triangel är större än längden av den tredje sidan.

Bevis. (Euklides). I en triangel ABC förlängs AB över B till en punkt D sådan att $|BD| = |BC|$. Drag CD . Då är $\angle ADC = \angle BCD$ enligt basvinkelsatsen.

Därför är $\angle ADC < \angle ACD$. Då måste $|AC| < |AD|$, ty $|AC| = |AD|$ skulle strida mot basvinkelsatsen och $|AC| > |AD|$ mot sats 6. Bev.

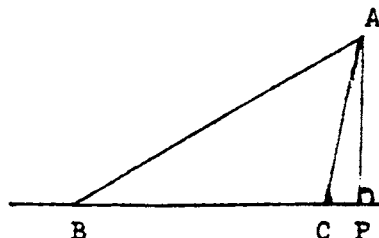
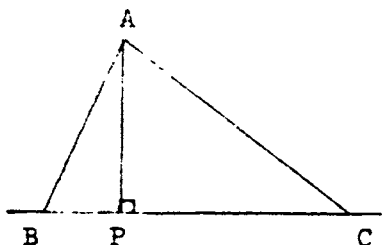


Sats 9. Minst två av vinklarna i en triangel måste vara spetsiga.

Bevis. Om en vinkel i en triangel är rät eller trubbig är tillhörande yttervinkel rät eller spetsig och de två återstående vinklarna i triangeln måste då enligt sats 5 vara spetsiga. Bev.

Sats 10. En triangel kan delas i två rätvinkliga trianglar.

Bevis. Låt i $\triangle ABC$ vinklarna B och C vara spetsiga. Drag normalen från A mot BC och kalla fotpunkten P . Vi har att visa att P ligger mellan B och C . Att P inte kan sammanfalla med B eller C



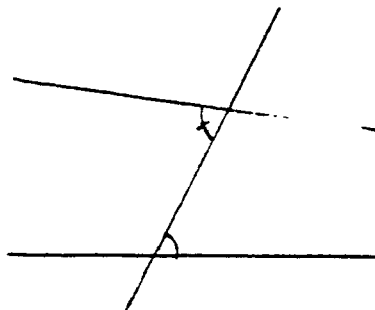
beror på att vinklarna vid B och C i $\triangle ABC$ inte är räta. Att P inte kan ligga på exempelvis förlängningen av BC över C beror på att $\angle ACB$ då vore yttervinkel till $\triangle ACP$ med $\angle P$ rät, vilket enligt sats 5 skulle medföra att $\angle ACB$ vore trubbig, i strid mot förutsättningen. Bev.

4.6 Parallella linjer och vinkelsumma i trianglar

Vi skall i detta avsnitt visa att det följer från axiomen för absolut geometri att det finns två möjligheter för parallella linjer, den euklidiska och den icke-euklidiska. För att visa detta behöver vi också studera vinkelsumma i trianglar. Vi arbetar således fortfarande i absolut geometri.

Först några definitioner. Då två linjer, L_1 och L_2 , skärs av en tredje linje, L , brukar denna kallas en transversal. Vid

vardera skärningspunkten uppstår 4 vinklar. Två av dessa vinklar, en vid vardera skärningspunkten, vilka ligger mellan L_1 och L_2 och på olika sidor om L , kallas alternativvinklar. Det finns två par av alternativvinklar. Om vinklarna i det ena paret alternativvinklar är lika med varandra gäller detta även vinklarna i det andra paret, eftersom dessa är sidovinklar till vinklarna i det första paret.



alternativvinklar

Vi påminner om att vi kallar två linjer parallella om de inte skär varandra, dvs om de inte har någon punkt gemensam. Vi skall utan något antagande om parallella linjer dra ett antal konsekvenser av sats 5 i föregående avsnitt och av beviset för denna sats.

Sats 11. Om två linjer L_1 och L_2 har en transversal L med lika alternativvinklar är de parallella.

Bevis. L_1 och L_2 kan inte skära varandra ty på vilken sida om linjen L detta än skulle ske, hade vi en triangel med en yttervinkel likamed en motstående innervinkel i strid mot vad sats 5 säger. Bev.

Sats 12. Genom en punkt P utanför en linje L_1 kan man dra minst en linje parallell med L .

Bevis. Drag en linje L genom P och en punkt på linjen L_1 , konstruera linjen L_2 genom P så att L skär L_1 och L_2 med lika alternativvinklar. Använd föregående sats. Bev.

Sats 13. (Euklides). Summan av två vinklar i en triangel är mindre än $2R$.

Bevis. På grund av sats 5 är summan av två vinklar i en triangel mindre än summan av den ena vinkeln och dess yttervinkel. Men denna summa är $2R$. Bev.

Vi skärper denna sats (fortfarande utan parallellaxiomet).

Sats 14. (Saccheri). Summan av vinklarna i en triangel är mindre än eller lika med $2R$.

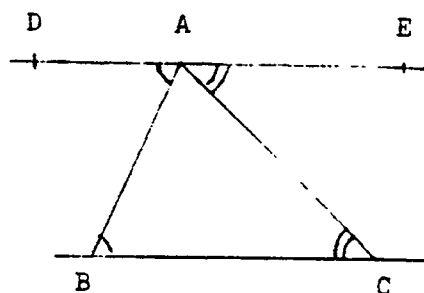
Bevis. Antag motsatsen. Låt $\triangle ABC$ ha vinkelsumman $2R + a$, $a > 0$. Genomför konstruktionen i beviset för sats 5. På grund av att $\triangle PCA \cong \triangle PBQ$ har $\triangle ABQ$ samma vinkelsumma som $\triangle ABC$. Dessutom är summan av de båda vinklarna vid A och Q i $\triangle ABQ$ likamed $\angle BAC$, varför en av dessa vinklar är $\leq \frac{1}{2} \angle BAC$. Kalla detta hörn A_1 och låt B_1 och C_1 vara de båda övriga hörnen i $\triangle ABQ$. Vi har då konstruerat en triangel $A_1B_1C_1$ med

samma vinkelsumma som $\triangle ABC$, dvs $2R + a$, och med $\angle A_1 \leq \frac{1}{2} \angle A$. Upprepar vi detta får vi en följd av trianglar $A_n B_n C_n$ alla med vinkelsumman $2R + a$ och med $\angle A_n \leq \frac{1}{2} \angle A_{n-1}$ och därför $\angle A_n \leq 2^{-n} \angle A$. Men enligt föregående sats är $\angle B_n + \angle C_n < 2R$ varav följer $\angle A_n > a$. Vi har alltså $a < 2^{-n} \angle A$ vilket är en motsägelse för tillräckligt stora n -värden. Bev.

Vi skall genom de följande 4 satserna visa att om det för någon linje och någon punkt utanför linjen endast finns en linje genom punkten parallell med linjen, så gäller detta för varje linje och varje punkt utanför linjen.

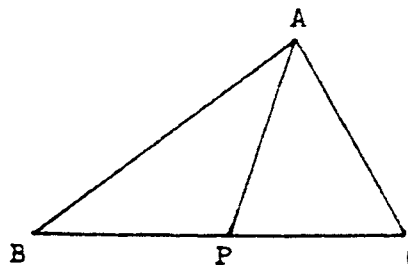
Sats 15. Om det genom hörnet A i $\triangle ABC$ endast går en linje parallell med BC så är triangelns vinkelsumma $2R$.

Bevis. Tag strålen AD sådan att $\angle BAD = \angle ACB$ och sådan att D och C ligger på olika sidor om linjen AB . Tag likaså strålen AE sådan att $\angle CAE = \angle ABC$ och sådan att E och B ligger på olika sidor om linjen AC . Var och en av dessa strålar tillhör en linje som enligt sats 11 måste vara parallell med linjen BC . Om det endast finns en sådan linje genom A måste AD och AE vara delar av denna linje. Vinkelsumman i triangeln, som är likamed summan av de tre vinklarna vid A , är då $2R$. Bev.



Sats 16. Om vinkelsumman i någon triangel är $2R$ så gäller detta alla trianglar.

Bevis. Vi studerar först en uppdelning av en triangel i två deltrianglar. Låt P ligga på sidan BC i $\triangle ABC$. Då är summan av alla vinklarna i $\triangle ABP$ och $\triangle ACP$ likamed vinkelsumman för $\triangle ABC$ adderat med $2R$. Vi ser härav att om $\triangle ABP$ och $\triangle ACP$ båda har vinkelsumman $2R$, så gäller detsamma även $\triangle ABC$. Men också omvänt. Ty har $\triangle ABC$ vinkelsumman $2R$, så blir summan av vinklarna i $\triangle ABP$ och $\triangle ACP$ likamed $4R$. Om därför någon av dessa trianglar skulle ha en vinkelsumma mindre än $2R$ skulle den andra ha en vinkelsumma större än $2R$ stridande mot sats 14.



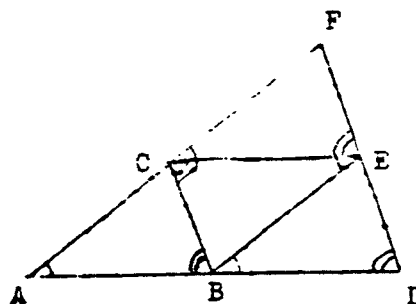
Har vi en triangel med vinkelsumman $2R$ kan vi därför på grund av sats 10 konstruera en rätvinklig triangel med vinkelsumman $2R$. Omvänt

räcker det att visa att alla rätvinkliga trianglar har vinkelsumman $2R$; en godtycklig triangel kan ju enligt sats 10 delas i två rätvinkliga.

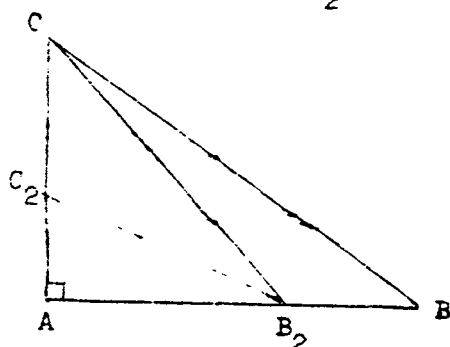
Därnäst konstaterar vi att om $\triangle ABC$ har vinkelsumman $2R$ så finns det en triangel med samma vinklar och med dubbelt så långa sidor. Detta inser vi genom att ta 4 kongruenta exemplar av triangeln så som figuren visar.

$$\triangle ABC \cong \triangle ECB \cong \triangle BDE \cong \triangle CEF$$

Då är ABD , ACF och DEF räta linjer eftersom vinkelsummorna vid B , vid C och vid E alla är $2R$.



Låt nu den rätvinkliga triangeln ABC ha vinkelsumman $2R$. Vi har att visa att en godtycklig rätvinklig triangel $A_1B_1C_1$ också har vinkelsumman $2R$. Låt A och A_1 vara de räta vinklarna. Genom eventuell upprepning av dubbleringsförfarandet kan vi anta att $\triangle ABC$ har längre sidor än $\triangle A_1B_1C_1$. Vi kan då flytta triangeln $A_1B_1C_1$ till en triangel AB_2C_2 med B_2 på sträckan AB och C_2 på sträckan AC . Men tekniken

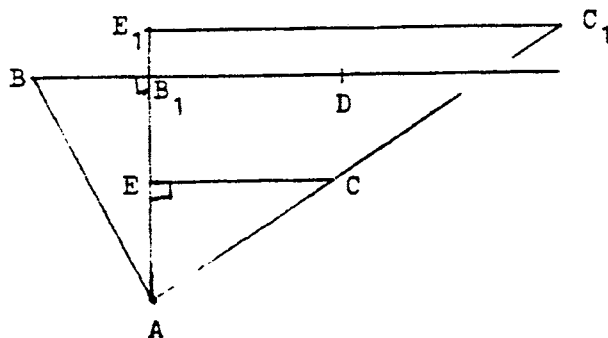


i början av beviset visar då först att $\triangle AB_2C_2$ har vinkelsumman $2R$ och därefter att $\triangle AB_2C_2$ har vinkelsumman $2R$. Bev.

Sats 17. Antag att vinkelsumman i trianglar är $2R$. Låt AB vara en sträcka, C och D två punkter på samma sida om linjen AB sådana att $\angle CAB + \angle DBA < 2R$. Då skär strålarna AC och BD varandra.

Bevis. Eftersom $\angle CAB + \angle DBA < 2R$ måste minst en av dessa båda vinklar vara spetsig, säg $\angle DBA$.

Drag normalen från A mot linjen BD . Låt B_1 vara fotpunkten. Eftersom $\angle DBA$ är spetsig ligger B_1 på strålen BD . Då vinkelsumman i $\triangle ABB_1$ är $2R$ och $\angle CAB + \angle DBA < 2R$ följer det att $\angle CAB_1$ är spetsig. Drag



normalen från C mot linjen AB_1 . Låt E vara fotpunkten. Då $\triangle CAB_1$ är spetsig ligger E på strålen AB_1 . Genom dubbleringstekniken i beviset för föregående sats, eventuellt upprepad ett antal gånger, kan vi konstruera en triangel AC_1E_1 med samma vinklar som $\triangle ACE$ och med $|AE_1| > |AB_1|$. Placera denna triangel med C_1 på strålen AC och E_1 på strålen AB_1 . Eftersom linjerna BD och E_1C_1 båda är vinkelräta mot AB_1 kan de inte råkas (följer från sats 11 eller från entydigheten av normalen från en punkt till en linje). E_1 och C_1 ligger alltså på samma sida om linjen BD . Men A och E_1 ligger på olika sidor om BD , eftersom $|AE_1| > |AB_1|$. Alltså ligger A och C_1 på olika sidor om BD och sträckan AC_1 skär denna linje. Denna skärningspunkt ligger på strålen AC . Då C och D ligger på samma sida om linjen AB , ligger skärningspunkten också på strålen BD . Bev.

Sats 18. Om vinkelsumman i trianglar är $2R$ finns det för varje punkt P utanför en linje L endast en linje genom P parallell med L .

Bevis. Låt L_1 vara en linje genom P parallell med L . Drag en transversal till L och L_1 genom P . Då måste alternatvinklarna vara lika stora. Ty annars skulle den mindre av ett par olika alternatvinklar och sidovinkeln till den större ha summan mindre än $2R$, så att enligt föregående sats L och L_1 skulle skära varandra och således inte vara parallella. Lika alternatvinklar fastlägger emellertid L_1 entydigt. Bev.

De fyra senaste satserna ger oss två alternativ beträffande parallella linjer. Den ena möjligheten är det euklidiska parallellaxiomet.

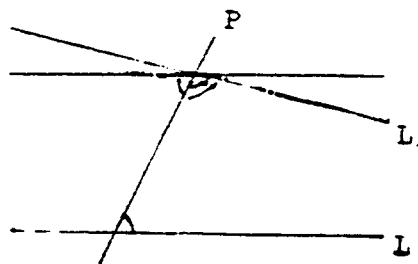
E) ("Euklides' parallellaxiomet")

eller kortare "parallellaxiomet"). Genom en punkt utanför en rät linje går högst en linje parallell med linjen.

För att E) skall gälla räcker det på grund av satserna 15 - 18 att det för någon linje och någon punkt utanför linjen finns endast en linje genom punkten parallell med linjen. Den andra möjligheten är därför följande.

IE) Genom en punkt utanför en rät linje finns alltid flera linjer parallella med linjen.

Detta axiom leder till den icke-euklidiska geometrin som vi skall behandla i avsnitt 4.8. I denna geometri är vinkelsumman i trianglar alltid mindre än $2R$ (på grund av satserna 16 och 18).



4.7 Euklidisk geometri: likformighet och Pytagoras' sats

I detta avsnitt skall vi förutsätta att Euklides' parallellaxiom är uppfyllt. Vi skall visa att axiomen för absolut geometri tillsammans med parallellaxiomet ger samma geometri som den vi presenterade i avsnitt 4.1, den euklidiska. Detta kommer vi att göra genom att utveckla likformighetsteorin och bevisa Pytagoras' sats.

Enligt satserna 15 och 18 är parallellaxiomet ekvivalent med att vinkelsumman i trianglar är $2R$.

Sats 19. Om två parallella linjer skärs av en tredje blir alternativvinklar lika stora.

Bevis. Detta är omvändningen till sats 11 och följer från denna sats på grund av parallellaxiomet. Bev.

(Alternativt kunde vi ha bevisat satsen från sats 17; jfr beviset för sats 18.)

Sats 20. Om två olika linjer båda är parallella med en tredje linje så är de sinsemellan parallella.

Bevis. Detta följer direkt från parallellaxiomet. Ty om de båda linjerna inte vore parallella så skulle de skära varandra i en punkt. Genom denna punkt skulle det då gå två linjer parallella med den tredje linjen. Bev.

Om två sinsemellan parallella linjer skär två andra sinsemellan parallella linjer uppstår en fyrhörning som kallas en parallelogram.

Sats 21. I en parallelogram är motstående sidor lika långa.

Bevis. Låt AB vara parallell med CD och AC parallell med BD . Drag diagonalen BC . Då är

$\angle ABC = \angle BCD$ (alternativvinklar vid parallella linjer),

$\angle ACB = \angle CBD$ (alternativvinklar vid parallella linjer).

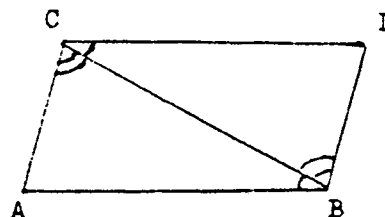
Därför är $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ enligt tredje

kongruensfallet. Alltså är $|AB| = |CD|$ och $|AC| = |BD|$. Bev.

Vi kallar två trianglar ABC och $A'B'C'$ likformiga (i formel $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$) om $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ och

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

Vi skall bevisa satser om likformiga trianglar svarande mot kongruensfallen. Man brukar ge dessa satser samma nummer som motsvarande kongruensfall. Bevisen för satserna om likformighet bygger på två varandra nära-



liggande satser som kallas transversalsatsen och topptriangelsatsen.

Sats 22. (Transversalsatsen). Om tre parallella transversaler till två linjer L och L' skär L i resp A, B, C och L' i resp A', B', C' så är

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$$

Bevis. Vi kallar en punkt på L och en punkt på L' motsvarande punkter om de ligger på en transversal parallell med de tre givna.

Utan inskränkning kan vi anta att A inte ligger mellan B och C och därmed A' inte mellan B' och C' . Då den andra likheten i satsen lätt följer från den första likheten, räcker det att bevisa

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|A'B'|}$$

Detta måste kopplas till definitionen av längd, given i avsnitt 4.3. $\frac{|AC|}{|AB|}$ är ju C 's koordinat på L då AB tas som grund för koordinater. Motsvarande gäller för $\frac{|A'C'|}{|A'B'|}$ på L' . Vi har alltså att bevisa att om sträckorna AB och $A'B'$ tas som grund för koordinater på L resp L' , får C och C' samma koordinat.

Vi visar detta först då $\frac{|AC|}{|AB|} = n$, n ett heltal. Tag på L punkterna $B_0 = A, B_1 = B, B_2, B_3, \dots, B_n = C$ med lika långa sträckor $B_{i-1}B_i$. Låt B_i' på L' vara den till B_i motsvarande punkten.

Vi vill visa att alla sträckorna $B_{i-1}'B_i'$ är lika långa. För varje i drag $B_{i-1}'D_i$ parallell med L och med D_i på linjen B_iB_i' . Då är sträckorna $B_{i-1}'D_i$ och

$B_{i-1}B_i$ motsatta sidor i en parallelogram och därför lika långa. Alla

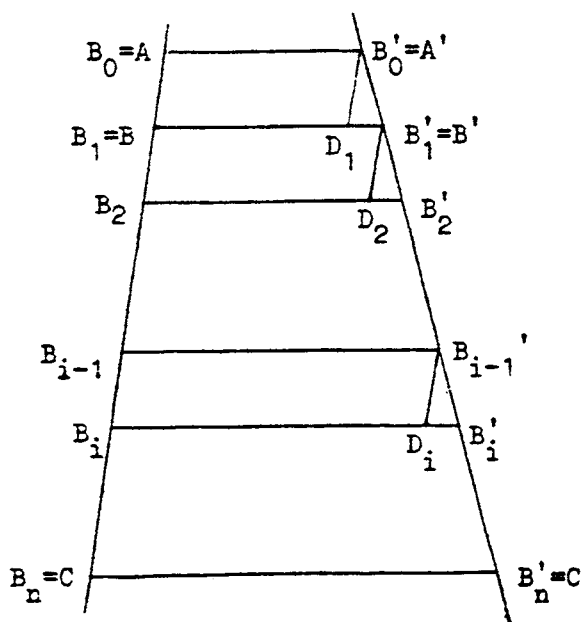
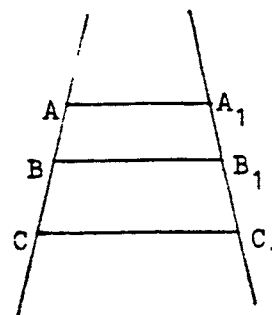
trianglarna $B_{i-1}'D_iB_i'$ är således kongruenta enligt sats 19 och tredje kongruensfallet. Därför är alla sträckorna

$B_{i-1}'B_i'$ lika långa.

Alltså är $|A'C'| =$

$= |B_0'B_n'| = n|B_0'B_1'| =$

$= n|A'B'|$. (Om L och L'



är parallella urartar triangelarna men då är $|B_{i-1}B_i| = |B_{i-1}'D_i| = |B_{i-1}'B_i'|$.)

För $a = p2^{-n}$ låt B_a vara den punkt på strålen AB som har koordinaten a , dvs för vilken $\frac{|AB_a|}{|AB|} = a$ och låt D vara den punkt för vilken $\frac{|AD|}{|AB|} = 2^{-n}$. Då är $|AB| = 2^n|AD|$ och $|AB_a| = p|AD|$. Från det fall vi just bevisat följer för de motsvarande punkterna på L' : $|A'B'| = 2^n|A'D'|$ och $|A'B_a'| = p|A'D'|$ så att $\frac{|A'B_a'|}{|A'B'|} = p2^{-n} = a$. Alltså är B_a' den punkt på L' som har koordinaten a .

Nu till det allmänna fallet. Eftersom ordningsföljden mellan punkter på L och motsvarande punkter på L' är densamma är

$$\sup \{a; B_a \text{ på sträckan } AC\} = \sup \{a; B_a' \text{ på sträckan } A'C'\}$$

Alltså har C och C' samma koordinat. Bev.

Sats 23. (Topptriangelsatsen). Låt ABB' vara en triangel. En med BB' parallell linje skär strålen AB i C och strålen AB' i C' . Då är $\triangle ABB' \sim \triangle ACC'$.

Bevis. Av symmetriskäl kan vi anta att B ligger mellan A och C och därför B' mellan A och C' . ($\triangle ABB'$ brukar kallas topptriangeln.) Från sats 19 får vi direkt att motsvarande vinklar i de båda triangelarna ABB' och ACC' är lika. Transversalsatsen ger $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB'|}{|AC'|}$. Drag $B'D$ parallell med AB , D på sträckan CC' . Då är BB' och CD motstående sidor i en parallelogram och därför lika långa. Transversalsatsen (tillämpad på linjerna $C'A$ och $C'C$) ger nu

$$\frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|CD|}{|CC'|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}$$

Detta fullbordar beviset för att $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Bev.

Sats 24. (Första likformighetsfallet). Om man i $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ har $\angle A = \angle A'$ och $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ så är triangelarna likformiga.

Bevis. Tag B'' på strålen

AB sådan att $|AB''| = |A'B'|$.

Drag $B''C''$ parallell med BC , C''

på strålen AC . Då är enligt

topptriangelsatsen

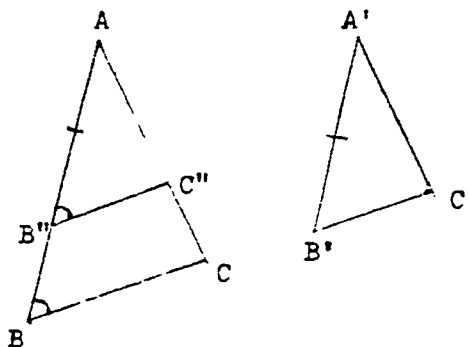
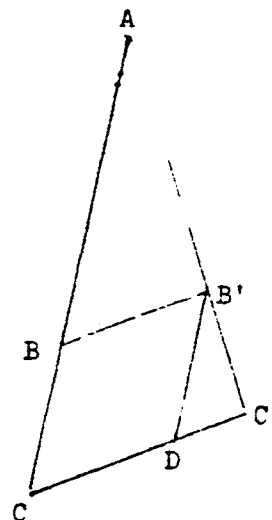
$\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$. Det räcker

därför att visa att

$\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$.

Att $\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$ ger

$$\frac{|AB|}{|AB''|} = \frac{|AC|}{|AC''|}. \text{ Från}$$



$|AB''| = |A'B'|$ och den i satsen givna likheten följer nu $|AC''| = |A'C'|$. Eftersom $\angle A = \angle A'$ är därför trianglarna $AB''C''$ och $A'B'C'$ kongruenta enligt första kongruensfallet. Bev.

Sats 25. (Andra likformighetsfallet.) Om i $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ man har $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$ så är trianglarna likformiga.

Bevis. Konstruera $\triangle AB''C''$ på samma sätt som i föregående bevis.

Att $\triangle ABC \sim \triangle AB''C''$ ger

$$\frac{|AB|}{|AB''|} = \frac{|AC|}{|AC''|} = \frac{|BC|}{|B''C''|}$$

Från $|AB''| = |A'B'|$ och de i satsen givna likheterna följer nu $|AC''| = |A'C'|$ och $|B''C''| = |B'C'|$. Trianglarna $AB''C''$ och $A'B'C'$ är därför kongruenta enligt andra kongruensfallet. Bev.

Sats 26. (Tredje likformighetsfallet). Om i $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ man har $\angle A = \angle A'$ och $\angle B = \angle B'$ så är trianglarna likformiga.

Bevis. Konstruera $\triangle AB''C''$ på samma sätt som i beviset för sats 24. Att $B''C''$ är parallell med BC ger $\angle AB''C'' = \angle ABC$, vilken enligt förutsättningen är $= \angle A'B'C'$. Eftersom $|AB''| = |A'B'|$ och $\angle A = \angle A'$ är därför trianglarna $AB''C''$ och $A'B'C'$ kongruenta enligt tredje kongruensfallet. Bev.

Vi skall nu formulera och bevisa Pytagoras' sats. I en rätvinklig triangel kallas de båda sidorna omslutande den räta vinkeln för kateter och den tredje sidan för hypotenusan. Med kvadraten på en katet (eller hypotenusan) avses kvadraten på längden av kateten (resp hypotenusan).

Sats 27. (Pytagoras' sats). I en rätvinklig triangel är kvadraten på hypotenusan likamed summan av kvadraterna på kateterna.

Bevis. Låt triangeln vara ABC med $\angle C$ rät. Låt $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Vi har att visa $c^2 = a^2 + b^2$.

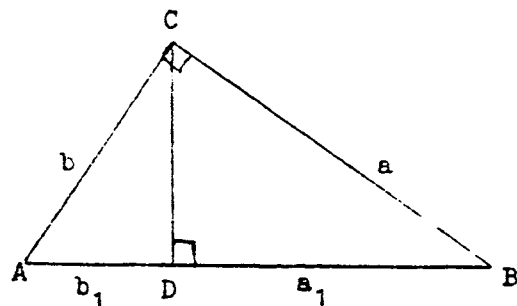
Drag normalen från C mot linjen AB , kalla fotpunkten D . Då båda vinklarna A och B är spetsiga ligger D på sträckan AB .

Sätt $a_1 = |BD|$, $b_1 = |AD|$. $\triangle BCD$ är likformig med $\triangle BAC$ (en vinkel gemensam, en vinkel rät). Alltså

$\frac{a_1}{a} = \frac{a}{c}$, $a^2 = a_1 c$. På samma sätt visas $b^2 = b_1 c$. Alltså är

$$a^2 + b^2 = a_1 c + b_1 c = (a_1 + b_1) c = c^2. \quad \text{Bev.}$$

Vi skall ge andra bevis för Pytagoras' sats i samband med area-begreppet (se avsnitt 4.10).

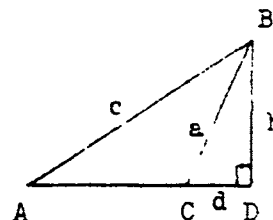
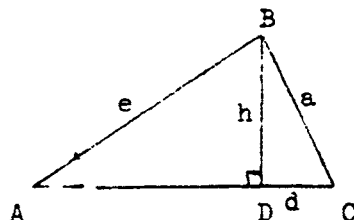


Sats 28. (Pytagoras' sats' omvändning). Om man med beteckningarna i beviset för föregående sats har $c^2 = a^2 + b^2$, så är $\angle C$ rät.

Bevis. (Euklides). Konstruera en triangel $A'B'C'$ med $|B'C'| = |BC| = a$, $|A'C'| = |AC| = b$ och vinkeln C' rät. Kalla tredje sidans längd c' . Då är $c'^2 = a^2 + b^2$. Men då $c^2 = a^2 + b^2$ följer $c' = c$. Därför är $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ enligt andra kongruensfallet. Då $\angle C'$ är rät är därför också $\angle C$ rät. Bev.

Omvändningen av Pytagoras' sats bevisas ofta med cos-satsen, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Man konstaterar då att $c^2 = a^2 + b^2$ medför $\cos C = 0$ och därmed $\angle C$ rät. Genom att kombinera detta med ett bevis för cos-satsen får man följande bevis för omvändningen till Pytagoras' sats.

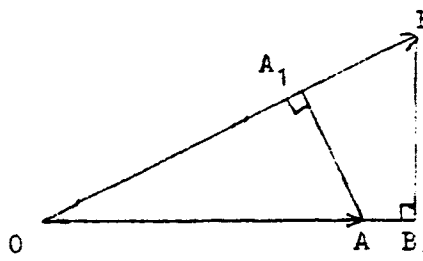
Antag att $\angle C$ inte är rät. Drag normalen från B mot AC . Kalla fotpunkten D . Sätt



$h = |BD|$, $d = |CD|$. Pytagoras' sats på $\triangle BCD$ och $\triangle ABD$ ger $a^2 = h^2 + d^2$, $c^2 = h^2 + (b \pm d)^2$, varav följer $c^2 - a^2 = (b \pm d)^2 - d^2 = b^2 \pm 2bd$, där tecknet beror på om $\angle C$ är spetsig eller trubbig. Men i båda fallen får vi en motsägelse mot $c^2 = a^2 + b^2$.

Sedan likformigheten är införd och Pytagoras' sats bevisad kan man på vanligt sätt beskriva geometrin med koordinater. Man tar två vinkelräta axlar och får en linjes ekvation i formen $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Avståndet mellan punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2) blir på grund av Pytagoras' sats $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Man kan sedan definiera vektor som en ekvivalensklass av lika riktade och lika långa sträckor och definiera skalära produkten genom att ta den ena vektorns projektion på den andra. Man konstaterar därefter att axiomen i avsnitt 4.1 är uppfyllda. Man kan på detta sätt inse att vi här har samma geometri som i avsnitt 4.1.

Observera att vi för att kunna visa att skalära produkten är kommutativ måste ha likformighetsteorin. Låt OA och OB vara sträckor, drag normalerna AA_1 och BB_1 mot linjerna OB resp OA . Vi behöver då att $|OA| |OB_1| = |OB| |OA_1|$. Men detta får vi från att trianglarna OAA_1 och OBB_1 är likformiga.



Enhetscirkelns ekvation blir $x^2 + y^2 = 1$. De trigonometriska funk-

tionerna kan definieras med hjälp av enhetscirkeln och man kan bevisa sinussatsen och cosinussatsen för trianglar, vilka med vanliga beteckningar lyder

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Dessa satser gör det möjligt att beräkna vinklar och sidor i en triangel då några av dessa är givna så att triangeln är bestämd enligt kongruensfallen. Observera också att man omvänt med dessa satser lätt kan bevisa kongruensfallen och likformighetsfallen.

De båda satserna, sin-satsen och cos-satsen, kan kompletteras med en tredje. Sätter man, i enlighet med sin-satsen, $a = k \sin A$ och $b = k \sin B$ får man

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}}{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}$$

varav

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$$

Denna likhet brukar kallas tangenssatsen. Den kan användas då man känner två sidor a, b i en triangel och mellan liggande vinkel C och vill beräkna de båda övriga vinklarna. Denna beräkning är naturligtvis möjlig genom att man först med cos-satsen beräknar den tredje sidan och därefter beräknar de båda vinklarna med sin-satsen. Med tan-satsen får vi emellertid vinklarna direkt. Man känner ju a, b och $A+B (= \pi - C)$ varför satsen ger $A-B$ och därmed A och B .

4.8 Kleins modell för icke-euklidisk geometri

Den icke-euklidiska geometrin (även kallad den hyperboliska geometrin) erhålles från absolut geometri genom tillägg av axiomat IE) (se slutet av avsnitt 4.6). För att bevisa motsägelsefriheten för denna geometri behöver vi en modell och tar därvid en modell konstruerad av F. Klein. Vi kommer inte att studera icke-euklidisk geometri axiomatiskt utan endast i denna modell.

Sätt i R^2 :

$$E = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}, S = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$$

Med en punkt i icke-euklidisk (nedan förkortat i.-e.) geometri menar vi en punkt i E . Med en i.-e. linje menar vi en korda i E , dvs mängden av de punkter i E som ligger på en euklidisk (nedan förkortat e.) linje

som skär E . Ordningen mellan punkterna på en linje skall i i.-e. geometri vara densamma som på kordan i e. geometri. Sträckan mellan två punkter blir därför densamma i i.-e. geometri som i e. geometri. Vi konstaterar lätt att ABS 1) - ABS 3) är uppfyllda. (För ABS 2) behöver vi att reella axeln och ett öppet intervall på axeln är isomorfa ordnade mängder. Detta kan man lätt inse exempelvis genom att betrakta

$$x \mapsto \frac{x}{1 + |x|} .)$$

Vi skall också definiera vad som menas med en i.-e. förflyttning (i.-e. kongruenstransformation) och bevisa ABS 4). Men innan vi gör detta låt oss konstatera att Euklides' parallellaxiom inte gäller. Genom en punkt utanför en linje finns alltid flera med den givna linjen parallella linjer, dvs linjer som inte råkar den (inom E).

Vi kan ge de i.-e. förflyttningarna $(x, y) \mapsto (u, v)$ genom att säga att det är de avbildningar för vilka

$$u = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{ax + by + c} \quad v = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{ax + by + c} \quad (1)$$

och för vilka E överförs bijektivt i sig själv och samtidigt S bijektivt i S . För att begränsa de nödvändiga kalkylerna förfar vi på följande sätt.

Vi definierar explicit två enkla typer av i.-e. förflyttningar $(x, y) \mapsto (u, v)$.

I) En euklidisk förflyttning av E som avbildar origo på origo.

Denna bibehåller eller omkastar orienteringen och kan skrivas

$$\begin{cases} u = x \cos \theta - y \sin \theta \\ v = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad \text{resp} \quad \begin{cases} u = x \cos \theta + y \sin \theta \\ v = x \sin \theta - y \cos \theta \end{cases}$$

Observera speciellt $\theta = 0$ i de sista formlerna. Vi får $u = x$, $v = -y$, som innebär en spiegling i x -axeln.

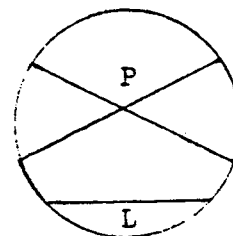
II) En i.-e. translation längs x -axeln:

$$u = \frac{x - a}{1 - ax} \quad v = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax} y \quad -1 < a < 1$$

Eftersom $|a| < 1$ är nämnaren inte 0 för $|x| \leq 1$, dvs varken i E eller på S .

Vi kallar en förflyttning av typ I eller II en elementär förflyttning. De elementära förflyttningarna har följande egenskaper.

a) En punkt (x, y) i E flyttas till en punkt (u, v) i E och en punkt (x, y) på S flyttas till en punkt (u, v) på S . Detta är trivialt för I och följer för II ur



Två linjer genom P parallella med L .

$$\begin{aligned}
 1 - u^2 - v^2 &= 1 - \left(\frac{x-a}{1-ax}\right)^2 - \frac{(1-a^2)y^2}{(1-ax)^2} = \\
 &= \frac{1-a^2}{(1-ax)^2} (1-x^2-y^2)
 \end{aligned}$$

b) En elementär förflyttning har en invers som är en elementär förflyttning. Ty om vi löser sambanden mellan (x, y) och (u, v) med avseende på x och y får vi

$$\begin{cases} x = u \cos(-\theta) - v \sin(-\theta) \\ y = u \sin(-\theta) + v \cos(-\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \cos\theta + v \sin\theta \\ y = u \sin\theta - v \cos\theta \end{cases}$$

och

$$x = \frac{u+a}{1+au} \quad y = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+au} v$$

På grund av a) och b) vet vi att en elementär förflyttning avbildar E bijektivt på E och S bijektivt på S .

c) En elementär förflyttning överför en i.-e. linje i en i.-e. linje med bibehållande av ordningsrelationen på linjen. Detta är trivialt för typ I. En förflyttning av typ II överför punkterna på en linje $x = c$ i punkter på linjen $u = \frac{c-a}{1-ac}$. Eftersom $v = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-ac} y$ bibehålls ordningen. Punkterna på en linje $y = kx + m$ övergår i punkter för vilka

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+au} v &= k \frac{u+a}{1+au} + m \\
 \sqrt{1-a^2} v &= k(u+a) + m(1+au)
 \end{aligned}$$

vilket är ekvationen för en linje. Ordningen på $y = kx + m$ ges av x -koordinaten. För att visa att ordningen bibehålls behöver vi därför visa att $x \mapsto \frac{x-a}{1-ax}$ är strängt växande. Detta kan göras med derivering men följer direkt från

$$\frac{x-a}{1-ax} - \frac{t-a}{1-at} = \frac{(x-t)(1-a^2)}{(1-ax)(1-at)}$$

Vi gör nu följande definition. En i.-e. kongruenstransformation eller förflyttning är en sammansättning av ändligt många elementära förflyttningar. Med utnyttjande av egenskaperna för elementära förflyttningar får vi följande egenskaper för i.-e. förflyttningar.

a) En punkt i E flyttas till en punkt i E , en punkt på S flyttas till en punkt på S .

b) Varje i.-e. förflyttning har en invers som också är en i.-e. förflyttning.

c) En i.-e. förflyttning överför en linje i en linje med bibehållande av ordningsrelationen på linjen.

d) Sammansättning av två eller flera i.-e. förflyttningar är en

i.-e. förflyttning.

Egenskaperna a) - d) visar att ABS 4) a) - c) är uppfyllda. Återstår ABS 4) d).

e) En godtycklig punkt i E kan flyttas till origo genom en i.-e. förflyttning. Ty vi kan vrida E så att punkten kommer till en punkt $(a, 0)$. En i.-e. translation överför $(a, 0)$ i $(0, 0)$.

f) Origo kan flyttas till en godtycklig punkt. Ty vi kan ta inversen till den förflyttning som flyttar punkten till origo.

g) En godtycklig punkt kan flyttas till en godtycklig punkt genom en i.-e. förflyttning. Ty vi kan flytta den först till origo och därefter till den andra punkten.

Följande lemma är tekniskt nödvändig med vår definition av i.-e. förflyttning.

Lemma. En i.-e. förflyttning som håller origo fast (som avbildar origo på origo) är en elementär förflyttning av typ I.

Bevis. Vi visar först att varje i.-e. förflyttning kan ges i formen (1) med lämpligt val av koefficienter. Eftersom detta är sant för de elementära förflyttningarna behöver vi endast visa att sammansättningen av två av formen (1) åter har denna form. Låt

$$s = \frac{d_1 u + e_1 v + f_1}{du + ev + f} \quad t = \frac{d_2 u + e_2 v + f_2}{du + ev + f}$$

vara en annan avbildning som flyttar (u, v) till (s, t) . Då är ...

$$s = \frac{(a_1 d_1 + a_2 e_1 + a f_1)x + (b_1 d_1 + b_2 e_1 + b f_1)y + (c_1 d_1 + c_2 e_1 + c f_1)}{(a_1 d + a_2 e + a f)x + (b_1 d + b_2 e + b f)y + (c_1 d + c_2 e + c f)}$$

och vi får ett uttryck för t med samma nämnare. Detta ger en sammansatt avbildning från (x, y) till (s, t) av formen (1). Alltså kan varje i.-e. förflyttning ges i formen (1).

Låt oss nu ta en förflyttning av formen (1) som överför $(0, 0)$ i $(0, 0)$. Insättning ger $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c \neq 0$. Vi vet att alla punkter på S övergår i punkter på S . Att insättning av $(1, 0)$ och $(-1, 0)$ skall ge punkter på S medför

$$\left(\frac{a_1}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{a+c}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{-a_1}{-a+c}\right)^2 + \left(\frac{-a_2}{-a+c}\right)^2 = 1$$

varav följer

$$(a+c)^2 = (-a+c)^2$$

$$ac = 0$$

och eftersom $c \neq 0$ följer härav $a = 0$. På motsvarande sätt visar vi

med hjälp av punkterna $(0, 1)$ och $(0, -1)$ att $b = 0$.

Vi tar nu $c = 1$ (vilket är tillåtet eftersom $c \neq 0$ och vi kan multiplicera samtliga koefficienter i (1) med samma tal $\neq 0$). (1) får då formen

$$u = a_1x + b_1y \quad v = a_2x + b_2y$$

Att insättning av $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ skall ge punkter på S medför

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 1 & b_1^2 + b_2^2 &= 1 \\ a_1b_1 + a_2b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Med θ valt så att $a_1 = \cos \theta$, $a_2 = \sin \theta$ erhålles

$(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$, dvs avbildningen är en elementär förflyttning av typ I. Bev.

h) Om A, B, C är tre punkter som inte ligger på linje finns det en enda i.-e. förflyttning som överför A i origo, B i en punkt på positiva x -axeln och C i en punkt i övre halvplanet. Ty att en sådan avbildning existerar följer av att vi kan flytta A till origo, därefter vrida kring origo tills B kommer på positiva x -axeln och slutligen eventuellt komplettera med en spegling i x -axeln så att C kommer i övre halvplanet. Om det funnes två sådana avbildningar skulle inversen till den ena följt av den andra ge en i.-e. förflyttning som överförde origo i origo, en punkt på positiva x -axeln i en punkt på positiva x -axeln och en punkt i övre halvplanet i en punkt i övre halvplanet. Vi har att visa att en sådan måste vara identiteten. Men att origo övergår i origo betyder enligt vårt lemma att avbildningen är av typ I. Att en punkt med $x > 0, y = 0$ skall övergå i en punkt med $u > 0, v = 0$ betyder att för denna punkt $(x, 0)$ skall $x \cos \theta > 0, x \sin \theta = 0$, vilket ger $\sin \theta = 0, \cos \theta > 0$ och alltså $u = x, v = \begin{pmatrix} \pm \\ - \end{pmatrix} y$. Att en punkt i övre halvplanet övergår i en punkt i övre halvplanet ger slutligen $v = y$.

Härav kan man nu sluta ABS 4)d) (avsnitt 4.2), ty det specialfall som behandlats i h) ger det allmänna fallet eftersom varje punkt A , stråle AB och sida om linjen AB kan i.-e. flyttas till origo, positiva x -axeln och övre halvplanet och eftersom de i.-e. förflyttningarna bildar en grupp.

Därmed är modellen av icke-euklidisk geometri helt beskriven. Vi vet att axiomen ABS 1) - ABS 4) är uppfyllda liksom axiomet IE.

Vi har därigenom klargjort att Euklides' parallellaxiom inte kan följa från de övriga axiomen. Ty om så vore fallet skulle axiomet IE motsägas av dessa axiom. Men då skulle vi ha en motsägelse i vår modell

av i.-e. geometri. Eftersom denna modell är given inom euklidisk geometri skulle motsägelsen innebära en motsägelse i euklidisk geometri. Om Euklides' parallellaxiom kunde bevisas från de övriga axiomen skulle vi alltså ha en motsägelse inom euklidisk geometri.

4.9 Icke-euklidisk geometri i Kleins modell

Vi kompletterar med vissa egenskaper hos icke-euklidisk geometri. Vi nöjer oss därvid med att visa dessa i modellen, vilket logiskt sett är en brist. Vi vet ju inte att ett på så sätt erhållet resultat måste följa från axiomen. (Men man kan bevisa att så alltid är fallet.)

Vi börjar med direkta bevis för satserna F1 (avsnitt 4.3) och F2 (avsnitt 4.4), vilka vi tidigare gav utan bevis (se dock Appendix 3).

i) För två punkter A, B finns en i.-e. förflyttning som överför A i B och B i A . Ty vi kan alltid flytta A till origo och B till en punkt $(a, 0)$. Det räcker därför att behandla detta specialfall. Men en i.-e. translation av typ II flyttar $(a, 0)$ till $(0, 0)$ och $(0, 0)$ till $(-a, 0)$. Om den följs av en vridning ett halvt varv kring origo flyttas $(a, 0)$ till $(0, 0)$ och $(0, 0)$ till $(a, 0)$.

Vi visar nu F1, att en sträcka inte kan vara kongruent med en del av sig själv. Låt AB vara en sträcka och antag att en i.-e. förflyttning flyttar A till A_1 och B till B_1 , varvid sträckan A_1B_1 är en (äkta) del av sträckan AB . Efter eventuell tillämpning av i) på sträckan A_1B_1 kan vi anta att AB och A_1B_1 är olika riktade så att B_1 ligger på sträckan AA_1 .

Tillämpas i) på AA_1 flyttas

A_1B_1 till en kongruent sträcka

AB_2 med B_2 på AB , $B_2 \neq B$.

Vi skulle alltså ha en i.-e. förflyttning som överför sträckan



Eventuellt $A = B_1$ eller
 $A_1 = B$ men inte båda.

AB i en delsträcka AB_2 . Men detta är omöjligt på grund av vårt lemma. Ty flyttas A till origo och B till en punkt på positiva x-axeln så är den avbildning som överför AB i AB_2 av typ I dvs en euklidisk förflyttning. Den har antingen formen $u = x, v = y$ eller $u = x, v = -y$ (jfr beviset för h). I båda fallen övergår varje punkt $(a, 0)$ i sig själv. Detta visar F1.

j) För en vinkel BAC finns en i.-e. förflyttning som överför strålen AB i strålen AC och strålen AC i strålen AB och därmed vinkeln i sig själv. Ty lägger vi vinkelspetsen i origo, ena vinkel-

benet längs positiva x-axeln och andra vinkelbenet längs linjen från origo till en punkt $(\cos \theta, \sin \theta)$, så ger avbildningen av typ I

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = x \sin \theta - y \cos \theta$$

den sökta avbildningen.

Från j) följer F2 på samma sätt som F1 ovan följde från i).

Ett knep för att erhålla resultat i modellen för i.-e. geometri är att flytta en intressant punkt till origo.

Exempel. Låt oss bestämma den i.-e. mittpunkten på sträckan från $(0, 0)$ till $(\frac{1}{2}, 0)$. Kalla denna $(a, 0)$ och flytta den till origo. På grund av formeln $u = \frac{x-a}{1-ax}$ övergår $(0, 0)$ i $(-a, 0)$ och $(\frac{1}{2}, 0)$ i $(\frac{1-2a}{2-a}, 0)$. Att origo nu är mittpunkten ger

$$a = \frac{1-2a}{2-a}, \quad a = 2 - \sqrt{3}.$$

En annan metod att bestämma mittpunkten är att kopiera beviset i avsnitt 4.3 för mittpunkt av sträcka. Tag exempelvis $(0, \frac{1}{2})$. Om $(0, 0)$ translateras till $(\frac{1}{2}, 0)$ övergår $(0, \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2}, v)$ där

$$v = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{2} \cdot 0} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

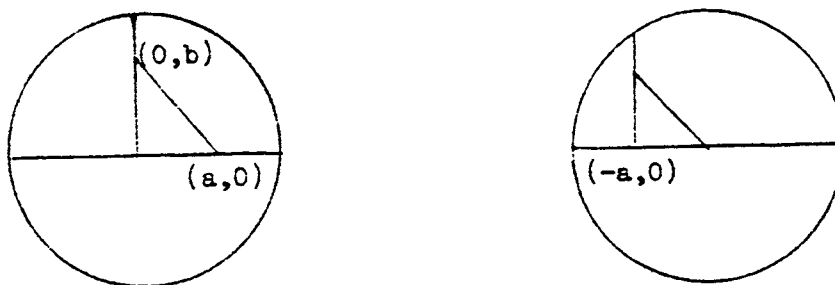
En i.-e. vridning ett halvt varv kring mittpunkten på den givna sträckan måste därför överföra $(0, \frac{1}{2})$ i $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$. Mittpunkten $(a, 0)$ måste alltså ligga på sträckan mellan dessa båda punkter, vilket ger

$$a = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Vid origo överensstämmer i.-e. måttet på en vinkel med det euklidiska. Ty en e. rät vinkel vid origo är även i.e. rät, eftersom vi har spegling i x-axeln. Dessutom är halvering och summering detsamma i båda geometrierna.

I allmänhet är emellertid det e. och det i.-e. måttet på en vinkel olika. Att vinkelsumman i en triangel alltid är mindre än $2R$ är en följd av axiomet IE. Detta konstaterade vi avsnitt 4.6. Men vi kan också visa det direkt i vår modell. Eftersom en triangel kan delas i två rätvinkliga trianglar, räcker det att visa det för rätvinkliga trianglar.

Tag en triangel med hörnen $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (0, 0)$. Den i.-e. translationen som flyttar A till origo flyttar B till $(-a, \sqrt{1-a^2}b)$ och C till $(-a, 0)$. Den i.-e. vinkeln vid A



ändras därvid inte (eftersom vi gör en i.-e. kongruenstransformation). Efter förflyttningen överensstämmer den med den euklidiska. Men euklidiskt minskar vinkeln vid förflyttningen. Alltså är det i.-e. måttet för vinkeln vid A mindre än det euklidiska. Motsvarande gäller vid B. Eftersom vinkelsumman i $\triangle ABC$ euklidiskt är $2R$, måste den icke-euklidiskt vara $< 2R$.

Vi vet från avsnitt 4.3 att vi kan införa längd av sträcka. Vi frågar oss därför vad längden av sträckan från origo till $(a, 0)$, $a > 0$, är, icke-euklidiskt sett. Kalla denna längd $f(a)$. För att denna skall vara entydigt bestämd måste vi normera i.-e. längd, dvs på något sätt ange vad som har längden 1. Vi gör detta genom att slå fast att för punkter nära origo skall i.-e. och e. avstånd vara approximativt lika, dvs

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a)}{a} = 1 \quad (2)$$

För att beräkna $f(a+h)$ translaterar vi $(a, 0)$ till origo. Då flyttas origo till $(-a, 0)$ och $(a+h, 0)$ till

$(\frac{h}{1-a(a+h)}, 0)$. Alltså är för $h > 0$:

$$f(a+h) = f(a) + f\left(\frac{h}{1-a(a+h)}\right)$$

och för $h < 0$:

$$f(a) = f(a+h) + f\left(\frac{-h}{1-a(a+h)}\right)$$

Detta ger

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{1-a(a+h)} \cdot f\left(\frac{|h|}{1-a(a+h)}\right) \bigg/ \frac{|h|}{1-a(a+h)}$$

Låter vi $h \rightarrow 0$ får vi härav

$$f'(a) = \frac{1}{1-a^2} \quad f(a) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+a}{1-a}$$

där integrationskonstanten är erhållen från $f(0) = 0$.

Exempel. Mittpunkten på sträckan från origo till $(\frac{1}{2}, 0)$ kan nu alternativt erhållas genom att man beräknar den i.-e. längden d av sträckan och halverar denna. Mittpunkten $(a, 0)$ skall därför satsifiera

$$d = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 \quad \frac{1}{4} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+a}{1-a}$$

vilket ger $a = 2 - \sqrt{3}$.

Exempel. Att x-axeln inom E verkligen i.-e. är oändligt lång kan man åskådliggöra genom att ta den translation som flyttar origo till $(\frac{1}{2}, 0)$. För denna gäller $u = \frac{2x+1}{x+2}$. Man kan därigenom beräkna punkter $(x_n, 0)$ på lika i.-e. avstånd, där

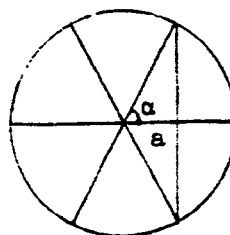
$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{4}{5}, x_3 = \frac{13}{14}, x_4 = \frac{40}{41}, \dots$$

Bland de linjer genom en punkt vilka är parallella med en given linje finns det två som är extrema. Tag exempelvis linjen $x = a$, $a > 0$ och låt punkten vara origo.

De extrema parallellerna till

$x = a$ är de som går genom punkterna $(a, \pm \sqrt{1-a^2})$ på cirkeln S.

Låt dessa bilda vinkeln α med positiva x-axeln (= normalen från origo mot linjen $x = a$). Då är $\cos \alpha = a$. Inför det i.-e. avståndet $d = \frac{1}{2} \ln \frac{1+a}{1-a}$ från origo till linjen.



$$d = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1}{2} \ln \cot^2 \frac{\alpha}{2} = \ln \cot \frac{\alpha}{2}$$

$$e^{-d} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

För olika d-värden har vi olika α -värden och omvänt. Detta innebär ett geometriskt samband mellan längd och vinkel. Eftersom vinkel är ett absolut begrepp som kan ges internt inom geometrin, är därför i i.-e. geometri även längd ett absolut begrepp. Liksom enheten för vinkelmätning, den rätta vinkeln, kan ges inom geometrin kan den av oss valda enhetssträckan beskrivas inom geometrin. Vi kan därför inte ha någon likformighetsteori i denna geometri. (Jfr också teorin för area, avsnitt 4.11)

Det finns inom i.-e. geometri formler, som sammanknyter sidorna och vinklarna i en triangel. Vi nöjer oss här med att ange motsvarigheten till Pytagoras' sats, dvs vi härleder sambandet mellan sidorna i en rätvinklig triangel.

Låt kateternas i.-e. längder vara a och b och hypotenusans i.-e. längd vara c . Låt deras euklidiska längder om de avsätts från

origo vara u, v resp w . Vi har $a = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$ vilket kan skrivas

$$u = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$$

och motsvarande samband gäller mellan v och b och mellan w och c .

Låt först triangelns hörn vara $(0, 0), (u, 0), (0, v)$. Gör den i.-e. translation längs x -axeln som flyttar dessa punkter till $(-u, 0), (0, 0), (-u, \sqrt{1-u^2} v)$. Härav $w^2 = u^2 + (1-u^2)v^2$, vilket kan skrivas $1-w^2 = (1-u^2)(1-v^2)$. Men

$$1-u^2 = \left(\frac{2}{e^a + e^{-a}} \right)^2$$

Inför man cosinushyperbolicus genom

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

så får man $1-u^2 = 1/(\cosh a)^2$. Motsvarande uttryck för $1-v^2$ och $1-w^2$ ger slutligen

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Observera att $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$ varför för små trianglar det erhållna sambandet kan skrivas

$$1 + \frac{c^2}{2} \approx \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right) \approx 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

i överensstämmelse med Pytagoras' sats.

(Det finns en motsvarande formel i sfärisk geometri; se Appendix 4.)

4.10 Area i euklidisk geometri

Vi skall diskutera areabegreppet i euklidisk geometri i detta avsnitt och i icke-euklidisk geometri i nästa avsnitt.

Areabegreppet visar sig i euklidisk geometri vara kopplat till likformighet och till Pytagoras' sats.

Vi vill definiera area för begränsade polygonala områden. Om arean av ett område D betecknas $m(D)$ vill vi att följande villkor skall vara uppfyllda.

AR1) $m(D) > 0$,

AR2) $m(D) = m(D_1) + m(D_2)$ då D delas i två områden D_1 och D_2 ,

AR3) $m(D_1) = m(D_2)$ då D_1 och D_2 är kongrenta.

Dessa tre villkor skall även vara uppfyllda för area i icke-euklidisk geometri. Vi har att dessutom fastlägga enhet för area.

ARE4) I euklidisk geometri skall $m(D)$ vara 1 då D är en kva-

drat med sidan 1.

Vi skall diskutera existens och entydighet av en sådan funktion och börjar med entydigheten. Vi antar således att $m(D)$ existerar och satisfierar villkoren ovan och visar hur $m(D)$ kan entydigt beräknas.

1) Låt D vara en kvadrat med sidan $1/n$, n heltal. Dela en enhetskvadrat i små kvadrater med sidlängd $1/n$. Det blir n^2 sådana kvadrater. Var och en av dessa är kongruent med D och har därför arean $m(D)$. Genom upprepade användning av AR2) får vi från ARE4):

$$1 = m(D) + m(D) + \dots + m(D) = n^2 m(D)$$

Alltså är $m(D) = 1/n^2$

2) Låt D vara en rektangel med sidor a och b , båda rationella. Sätt $a = p_1/q$, $b = p_2/q$ där p_1, p_2, q är positiva heltal. Dela D i kvadrater med sidan $1/q$. Det blir $p_1 p_2$ sådana kvadrater. På grund av 1) får vi

$$m(D) = p_1 p_2 \frac{1}{q^2} = \frac{p_1}{q} \frac{p_2}{q} = ab$$

3) Om D är en delmängd av D_1 då är $m(D) \leq m(D_1)$. Ty om D inte är hela D_1 delas D_1 i D och resten $D_1 \setminus D$. Vi får

$$m(D_1) = m(D) + m(D_1 \setminus D) > m(D)$$

4) D är en rektangel med sidorna a och b . Välj följder av rationella tal a_n' och a_n'' sådana att $a_n' \leq a \leq a_n''$, $a_n' \rightarrow a$, $a_n'' \rightarrow a$. Välj på samma sätt b_n' och b_n'' . På grund av 2) och 3) får vi

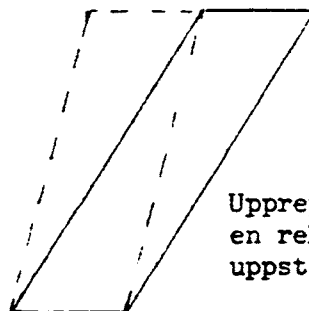
$$a_n' b_n' \leq m(D) \leq a_n'' b_n''$$

Låter vi här $n \rightarrow \infty$, får vi $m(D) = ab$.

5) Låt D vara en parallelogram med bas b och höjd h . Genom att skära av en triangel och parallellförflytta den (ev upprepat ett an-



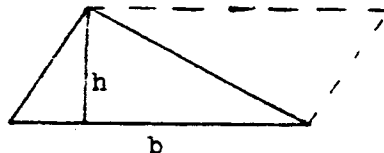
Delning och hopsättning till rektangel



Upprepas tills en rektangel uppstår.

tal gånger) når man en rektangel med samma bas och höjd och samma area. Alltså $m(D) = bh$.

6) Låt D vara en triangel med bas b och höjd h . Av två kongruenta exemplar gör man en parallelogram med samma bas och höjd alltså $m(D) = \frac{1}{2}bh$.



7) Ett godtyckligt polygonalt område D kan delas i trianglar $D_1, \dots, D_n$. Väljer man för var och en av dessa en bas b_i och motsvarande höjd h_i , så är

$$m(D) = m(D_1) + \dots + m(D_n) = \frac{1}{2}b_1h_1 + \dots + \frac{1}{2}b_nh_n$$

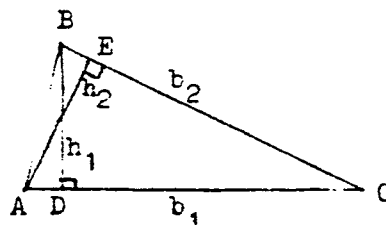
Detta visar att $m(D)$ är entydigt bestämd. Det finns alltså högst en funktion m som satisfierar AR1) - AR4).

Vi skall på två sätt visa existensen. Först en metod utan gränsövergång. Därefter en snabbare metod byggd på gränsövergång i nära anslutning till integralbegreppet.

För en triangel definierar vi $m(D) = \frac{1}{2}bh$. Vi har då att förvissa oss om att denna definition är oberoende av vilken sida vi väljer till bas. Med beteckningarna i figuren är $\triangle AEC$ likformig med $\triangle BDC$ (lika vinklar). Härav

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

så att $b_1h_1 = b_2h_2$.



Ett godtyckligt polygonalt område D delar vi upp i trianglar $D_1, \dots, D_n$ och definierar $m(D)$ som $\sum_{i=1}^n m(D_i)$. Vi måste emellertid visa att denna summa är densamma för två olika uppdelningar i trianglar. Eftersom, som man lätt konstaterar, två uppdelningar har en gemensam finare uppdelning är allt vi behöver studera fallet då en triangel delas i mindre trianglar.

Lemma 1. Om en triangel D delas i småtrianglar $D_1, \dots, D_n$ så är

$$m(D) = \sum_{i=1}^n m(D_i)$$

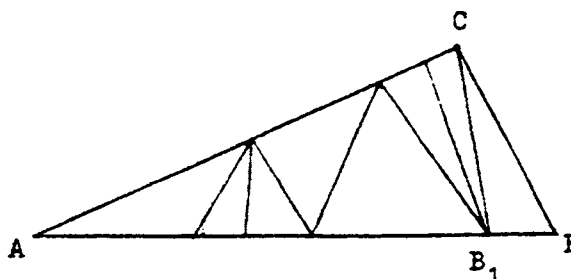
Beviset uppdelas i flera steg.

1) D delas i två trianglar av en linje genom ett hörn. Vi har då D delad i två deltrianglar D_1 och D_2 alla med samma höjd och med

baserna b, b_1, b_2 för vilka $b = b_1 + b_2$. Alltså är

$$m(D) = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h = m(D_1) + m(D_2)$$

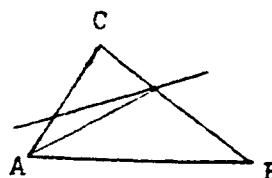
2) D är delad i trianglar som har alla hörn på två av D 's sidor, säg AB och AC . Låt $D_1, \dots, D_{n-1}, D_n$ vara trianglarna räknade från A . Påståendet i lemma 1 är redan bevisat för $n = 1, 2$. Antag det gäller för $n - 1$. Låt beteckningen vara vald så att D_n är $\triangle B_1BC$. Då är



$$\sum_{i=1}^n m(D_i) = \sum_{i=1}^{n-1} m(D_i) + m(D_n) = m(\triangle AB_1C) + m(D_n) = m(D)$$

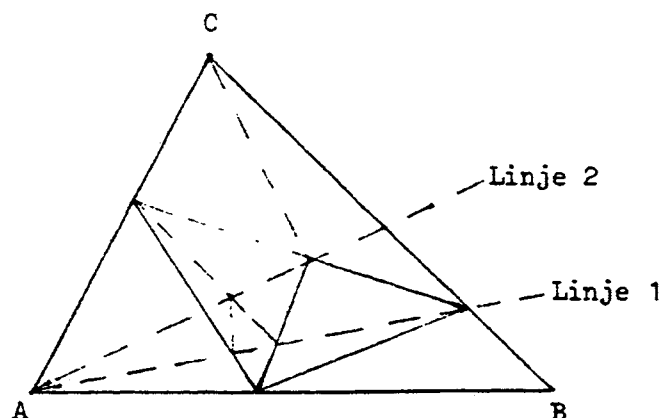
där den sista likheten följer från 1).

3) Om en linje skär en triangel D , kan D delas i småtrianglar med de nya hörnen på den skärande linjen och sådana att summan av småtriangelarnas m -värden är $m(D)$. Ty om linjen går genom ett hörn följer detta från 1), om inte gör vi konstruktionen i figuren. För summan av m -värdena tillämpar vi 2), i det vi observerar att alla hörn ligger på AC och BC .

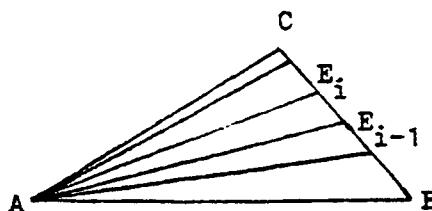


4) Låt nu allmänt en triangel D vara delad i småtrianglar. En linje som skär D skär några av småtriangelarna. Gör konstruktionen enligt 3) för var och en av dem. Vi får en ny uppdelning men med samma summa av m -värden. Ty varje $m(D_i)$ är efter konstruktionen ersatt med några termer som har $m(D_i)$ som summa.

5) Låt triangeln vara ABC . Drag genom A linjer, en i taget, och tillämpa konstruktionen enligt 4). Gör detta så att alla hörn



ligger på dessa linjer (alla nya hörn ligger ju på konstruktionslinjerna, dessa linjer väljs så att de går genom de gamla hörnen). Linjerna skär BC i punkter $B = E_0, E_1, E_2, \dots, E_k = C$, tagna i denna ordning. Eftersom det inte finns några hörn inuti $\triangle AE_{i-1}E_i$ eller på sträckan $E_{i-1}E_i$ kan vi tillämpa 2); summan av m-värdena ändras inte om uppdelningen av $\triangle AE_{i-1}E_i$ ersätts med den odelade triangeln $AE_{i-1}E_i$. Vi har därmed reducerat problemet till det fall då triangeln är delad av linjerna AE_i . Men ytterligare en tillämpning av 2) (alla hörn ligger på CA och CB) fullbordar beviset av lemma 1. Bev.

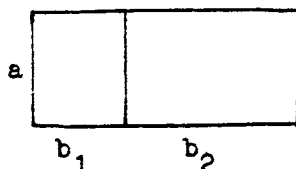


Sedan lemma 1 är bevisad fungerar definitionen av $m(D)$ för godtyckliga polygonala områden. Man konstaterar lätt att AR1) - ARE4) är uppfyllda.

I ett andra bevis för existensen av $m(D)$ väljer man två vinkelräta linjer, kallar dem axlar och betraktar först endast axelparallella områden, dvs områden vars rand består av sträckor var och en parallell med någon av axlarna. För en axelparallell rektangel med sidorna a och b definierar man $m(D) = ab$. Ett godtyckligt axelparallellt område D kan delas i axelparallella rektanglar $D_1, \dots, D_n$ och man sätter $m(D) = \sum_{i=1}^n m(D_i)$. Man har att bevisa följande lemma.

Lemma 2. Om en axelparallell rektangel delas i mindre axelparallella rektanglar D_i så gäller $m(D) = \sum m(D_i)$.

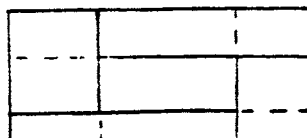
Beviset är väsentligen detsamma som för lemma 1 men betydligt enklare. För en delning av en rektangel i två har vi



$$m(D) = ab = a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2 = m(D_1) + m(D_2)$$

Med sådana tudelningar kan vi dela upp rektangeln tills alla delningssträckor är utdragna som sträckor mellan motsatta sidor i D .

Om sidorna i D är delade i sträckor av längder a_i resp b_j är då



$$\sum_{i,j} m(D_{ij}) = \sum_{i,j} a_i b_j = (\sum_i a_i)(\sum_j b_j) = ab = m(D)$$

Därmed fungerar definitionen av $m(D)$ för godtyckliga axelparallella områden D .

För godtyckliga områden definierar man $m(D)$ med en limesprocedur, genom att man inskriver och omskriver axelparallella polygoner. (De steg vi därvid använt ingår i definitionen av dubbelintegral. Om definitionen av dubbelintegral är känd kan därför arean $m(D)$ definieras som $\iint_D dx dy$ dvs dubbelintegralen över funktionen 1 över området D .)

Observera att man med denna definition av area endast vet att arean är oförändrad vid en parallellförskjutning och måste visa att den är oförändrad vid en vridning. Detta kan ske på följande sätt. En snett liggande rektangel kan genom delning och hopsättning överföras först till en parallelogram med ena sidparet parallellt med en axel och där- efter till en axelparallell rektangel. Parallelogrammen har samma $m(D)$ som både den sneda och den axelparallella rektangeln (delarna har en-

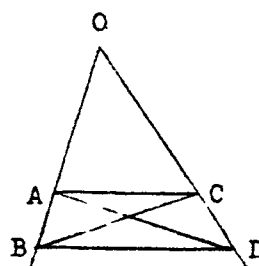


dast parallellförskjutits och sedan hopsatts på annat sätt). Parallelo- grammen har också samma bas och höjd som vardera rektangeln men med olika sidpar som bas. Att för en parallelogram "basen gånger höjden" är den- samma vilket sidpar man väljer som bas, bevisas som för trianglar, dvs med hjälp av likformiga trianglar.

Bevisen ovan för existensen av area bygger på likformighetsteo- rin. Omvänt kan existensen av area användas för bevis av transversal- satsen för två skärande linjer och därmed ge likformighetssatserna. Se figur. AC och BD är parallella. $\triangle ACD$

$\triangle ACB$ har samma bas och lika höjd. Deras areor är därför lika.

Addera $\triangle OAC$. Vi får att $\triangle OBC$ har samma



area som $\triangle OAD$. Genom att betrakta trianglar med samma höjd får vi

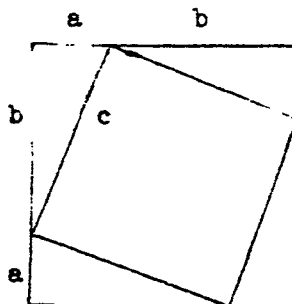
$$\frac{m(\triangle OAC)}{m(\triangle OBC)} = \frac{|OA|}{|OB|} \quad \frac{m(\triangle OAC)}{m(\triangle OAD)} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

Detta ger transversalsatsen för linjerna OAB och OCD.

Med hjälp av area kan man ge alternativa bevis för Pytagoras' sats. Vi ger några sådana bevis.

Låt a , b vara kateternas längder och c hypotenusans längd i en rätvinklig triangel. Vi konstruerar en kvadrat med sidan $a + b$ och uppdelar denna så som figuren visar. De fyra triangelarna har tillsammans arean

$$4 \frac{ab}{2} = 2ab. \text{ Därför är}$$



$$2ab + c^2 = (a + b)^2$$

vilket förenklat ger Pytagoras' sats.

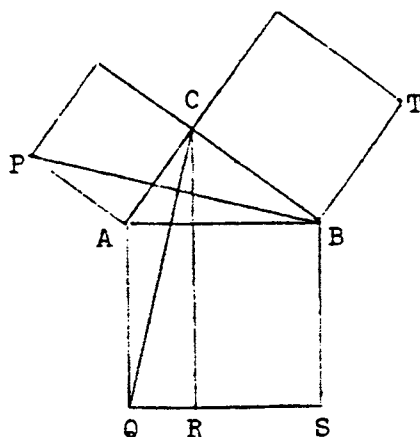
(Omvänt, om Pytagoras' sats är bevisad kan denna konstruktion användas för att visa att för den inre kvadraten D gäller

$$m(D) = (a + b)^2 - 4 \frac{ab}{2} = a^2 + b^2 = c^2$$

Härur följer lätt areans invarians vid vridning.)

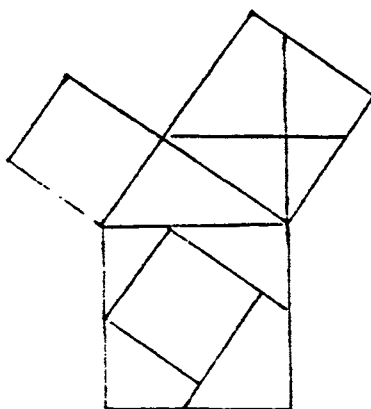
Eftersom en kvadrat med sidan d har arean d^2 kan Pytagoras' sats tolkas som en sats om areorna av de kvadrater som kan upprättas på kateterna och hypotenusan. Euklides gav följande bevis för Pytagoras' sats i denna tolkning.

Se figur. Triangelarna PAB och CAQ är kongruenta och har alltså samma area. Kvadraten med tre hörn P, A, C har en area som är



dubbla arean av den ena triangeln (samma bas och höjd) och rektangeln med tre hörn A, Q, R har en area som är dubbla arean av den andra triangeln (samma bas och höjd). Kvadraten och rektangeln har alltså samma area. På samma sätt visas att kvadraten med tre hörn T, B, C har samma area som rektangeln med tre hörn B, S, R,

Slutligen ger vi ett bevis för Pytagoras' sats i vilket man plockar ihop kvadraten på hypotenusan av kvadraterna på kateterna, på lämpligt sätt uppdelade.



Dela kvadraten på den större kateten genom två sträckor, den ena parallell med, den andra vinkelrät mot hypotenusan så som figuren visar. Tillsammans med kvadraten på den mindre kateten får man fem bitar som man lätt plockar ihop till kvadraten på hypotenusan. Detaljerna överlåtes åt läsaren. Observera att bitarna i detta bevis inte vrids utan endast parallellförskjuts.

Slutanmärkning. Vi ser således att likformighetsteorin, Pytagoras' sats och areabegreppet hänger ihop. Vilken man i en framställning av geometrin får först och vilka man drar som konsekvens beror väsentligen på vilken utgångspunkt (axiomatik) man tar för geometrin.

4.11 Area och defekt i icke-euklidisk geometri

Vi skall i detta avsnitt visa att area i icke-euklidisk geometri hänger ihop med vinklar; när man känner en triangels vinklar kan dess area beräknas.

Vi vill åter införa area för begränsade polygonala områden. Den skall uppfylla villkoren AR1) - AR3) givna i föregående avsnitt. Vi kan nu inte normera arean på samma sätt som i ARE4); det finns ju inga

kvadrater i i.-e. geometri. Men för små figurer är i.-e. geometri approximativt lika med den euklidiska. Vi tar därför:

ARI4) För varje liten rätvinklig triangel D i vilken kateterna har längderna a och b är arean $m(D)$ approximativt likamed $\frac{1}{2}ab$.

Noggrant uttryckt betyder detta: För varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att det för varje rätvinklig triangel D med kateter a och b , båda mindre än δ , gäller

$$(1 - \epsilon) \frac{ab}{2} < m(D) < (1 + \epsilon) \frac{ab}{2}$$

Vi skall visa existensen och entydigheten av $m(D)$ och börjar med entydigheten. Vi kan dela upp ett polygonalt område i små trianglar och var och en av dessa i två rätvinkliga trianglar. Vi får ett antal rätvinkliga trianglar D_i med kateter a_i, b_i . Om alla trianglarna är tillräckligt små gäller

$$(1 - \epsilon) \frac{1}{2} a_i b_i < m(D_i) < (1 + \epsilon) \frac{1}{2} a_i b_i$$

för varje i och därför

$$(1 - \epsilon) \frac{1}{2} \sum a_i b_i < m(D) < (1 + \epsilon) \frac{1}{2} \sum a_i b_i$$

Alltså ligger $m(D)$ i ett intervall $]c, d[$ där

$$\frac{d}{c} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon}$$

Då ϵ är ett godtyckligt positivt tal visar detta entydigheten av $m(D)$.

För att klara existensen betraktar vi vinkelsumman i en triangel. Denna är ju i i.-e. geometri mindre än $2R$. Skillnaden mellan $2R$ och vinkelsumman kallar vi triangelns defekt. Vi väljer att mäta vinklar i radianer och får då att defekten för $\triangle ABC$ med vinklarna A, B, C är $\pi - (A + B + C)$. Om D är en triangel sätter vi $m(D) = D$'s defekt. Ett godtyckligt polygonalt område delar vi i trianglar D_i och sätter $m(D) = \sum m(D_i)$ och kallar detta D 's defekt. För att denna definition skall vara korrekt behöver vi visa lemma 1 i föregående avsnitt för denna funktion m . Beviset är detsamma som i föregående avsnitt utom första steget, då en triangel delas i två trianglar med en linje genom ett hörn. Men att defekten för hela triangeln i detta fall är summan av deltriangelarnas defekter följer direkt från definitionen av defekt (jfr också första delen av beviset för sats 16, avsnitt 4.6).

Defekten $m(D)$, definierad på detta sätt, satisfierar AR1) - AR3). För att verifiera ARI4) tag i vår modell av i.-e. geometri en triangel

med hörn $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, där $a > 0$, $b > 0$. Vi skall låta a och b vara små och vet att a och b då approximativt är längden av de båda kateterna. För att beräkna vinkeln A (vid $(a, 0)$) flyttar vi denna punkt till origo genom en i.-e. translation. Därvid övergår $(0, 0)$ i $(-a, 0)$ och $(0, b)$ i $(-a, b\sqrt{1-a^2})$ så att

$$\tan A = \frac{b\sqrt{1-a^2}}{a}$$

Likaså är

$$\tan B = \frac{a\sqrt{1-b^2}}{b}$$

Detta ger

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1}{ab} \frac{b^2\sqrt{1-a^2} + a^2\sqrt{1-b^2}}{(1 - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2})}$$

För defekten gäller därför

$$\begin{aligned} \tan(\pi - (A+B+C)) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - (A+B)\right) = \cot(A+B) = \\ &= ab \frac{1 - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}{b^2\sqrt{1-a^2} + a^2\sqrt{1-b^2}} \end{aligned}$$

Eftersom det för små vinklar gäller $\tan x \approx x$ räcker det för att visa att defekten satisfierar ARI4) att vi visar

$$\frac{1 - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}{b^2\sqrt{1-a^2} + a^2\sqrt{1-b^2}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{då } (a, b) \rightarrow (0, 0)$$

Men efter förlängning får vi

$$\frac{1}{1 + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}} \frac{a^2 + b^2 - a^2b^2}{b^2\sqrt{1-a^2} + a^2\sqrt{1-b^2}}$$

Första faktorn går mot $\frac{1}{2}$ och i andra faktorn är såväl täljare som nämnare approximativt $a^2 + b^2$. Ty vi har

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &> b^2\sqrt{1-a^2} + a^2\sqrt{1-b^2} > b^2(1-a^2) + a^2(1-b^2) = \\ &= a^2 + b^2 - 2a^2b^2 \end{aligned}$$

varför påstående följer från

$$0 < \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} < a^2 + b^2 \rightarrow 0$$

Detta visar att defekten satisfierar ARI4)

Vi ser alltså att defekten satisfierar samtliga villkor för area så att vi kan beräkna arean genom att beräkna defekten. (Detta har en motsvarighet för sfäriska trianglar, se Appendix 4.)

Härav följer att area för trianglar är begränsad i i.-e. geometri; den är alltid mindre än π (vilket ånyo visar att vi inte kan ha någon likformighetsteori i i.-e. geometri). Vidare ser vi att arean av en triangel, dvs triangelns storlek, är bestämd av dess vinklar. Detta kan skärpas till följande sats, vars bevis lämnas som övning.

Sats. I i.-e. geometri är två trianglar kongruenta om motsvarande vinklar är lika. (Detta brukar kallas femte kongruensfallet.)

4.12 Klassiska satser i euklidisk geometri

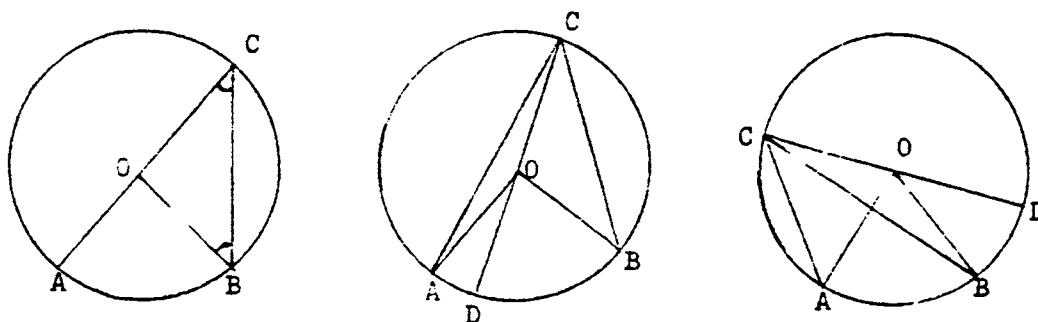
Sats 29. (Yttervinkelsatsen). En yttervinkel till en triangel är summan av motstående innervinklar.

Bevis. Detta följer från satsen att vinkelsumman i en triangel är $2R$, eftersom en yttervinkel och tillhörande innervinkel har summan $2R$. Bev.

Två olika punkter A, B på en cirkel delar cirkeln i två cirkelbågar. Tag en av dem och kalla den för bågen AB . Låt C vara en punkt på den andra bågen med ändpunkter A och B . Då kallas $\angle ACB$ en randvinkel (eller periferivinkel) stående på bågen AB . Om O är cirkelns medelpunkt kallas $\angle AOB$ bågens medelpunktsvinkel varvid vi med $\angle AOB$ denna gång avser den vinkel som har vinkelbenen OA och OB och som omfattar den valda bågen AB (den kan alltså vara större än $2R$).

Sats 30. (Satsen om medelpunktsvinkeln). Medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som en randvinkel stående på samma båge.

Bevis. Vi tar först det fall då ena vinkelbenet till $\angle ACB$,



säg AC , går genom O . Vinkeln AOB är då yttervinkel till $\triangle OBC$ och därför likamed summan av vinklarna B och C i denna triangel. Men då denna triangel är likbent med $|OB| = |OC|$ är vinklarna B och C lika, varför $\angle AOB = 2\angle ACB$ och satsen är bevisad i detta fall.

I det fall då diametern COD råkar bågen AB i en punkt D får vi på grund av det redan bevisade fallet att $\angle AOD = 2\angle ACD$, $\angle BOD = 2\angle BCD$. Genom addition erhålles $\angle AOB = 2\angle ACB$.

På samma sätt behandlas det tredje fallet (se figuren) med den skillnaden att vi där har att subtrahera i stället för att addera. Bev.

Sats 31. (Randvinkelsatsen). I en cirkel är randvinklarna stående på samma båge lika stora.

Bevis. Detta följer direkt från föregående sats. Bev.

De två senaste satserna är svåra att erhålla direkt genom räkning med koordinater eller vektorer.

En korda i en cirkel delar cirkeln i två cirkelbågar och delar cirkelområdet i två områden kallade cirkelsegment. En randvinkel stående på den ena cirkelbågen säges också vara randvinkel i det segment som ligger på andra sidan kordan, dvs det segment som innehåller vinkelspetsen. Randvinkelsatsen kan då också formuleras: Alla randvinklar i ett cirkelsegment är lika stora.

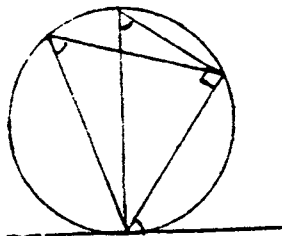
Speciellt är randvinkeln i ett halvcirkelområde en rät vinkel; dess medelpunktsvinkel är ju $2R$.

Sats 32. I en fyrhörning inskriven i en cirkel är summan av motstående vinklar $2R$.

Bevis. Motsvarande medelpunktsvinklar bildar tillsammans ett helt varv, dvs $4R$. Använd satsen om medelpunktsvinkeln. Bev.

Sats 33. (Korda-tangent-satsen). Vinkeln mellan en tangent till en cirkel och en korda genom tangeringspunkten är lika med randvinkeln i segmentet på andra sidan kordan.

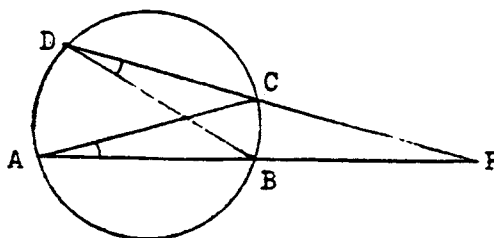
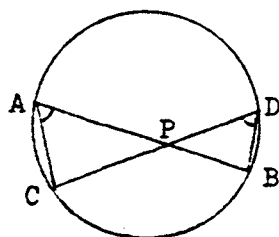
Bevis. Eftersom alla randvinklar i segmentet är lika tar vi den som har diametern genom tangeringspunkten som ena vinkelbenet. Då blir vinkeln vid kordans andra ändpunkt rät och satsen följer omedelbart. Bev.



Sats 34. (Kordasatsen). Om två kordor AB och CD i en cirkel skär varandra (eventuellt efter förlängning) i P så är

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|.$$

Bevis. Drag AC och BD. Då är $\angle BAC = \angle BDC$, eftersom de



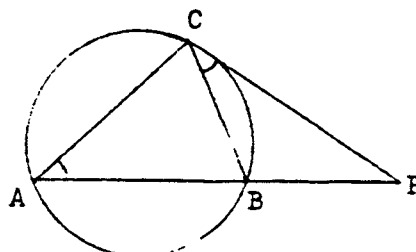
står på samma båge. Alltså har $\triangle PAC$ och $\triangle PDB$ motsvarande vinklar lika och är därmed likformiga. Detta ger

$$\frac{|PA|}{|PD|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$

varav satsen följer. Detta bevis går igenom vare sig P ligger inom eller utom cirkeln. Bev.

Om P ligger utanför cirkeln kan ena kordan vridas till en tangent, säg $C = D$. Satsen säger då $|PA||PB| = |PC|^2$. Ett direkt bevis (utan gränsövergång) fås om man drar AC och BC . Korda-tangent-satsen ger $\angle PCB = \angle PAC$ så att triangeln PAC och PCB blir likformiga, vilket ger

$$\frac{|PA|}{|PC|} = \frac{|PC|}{|PB|}$$



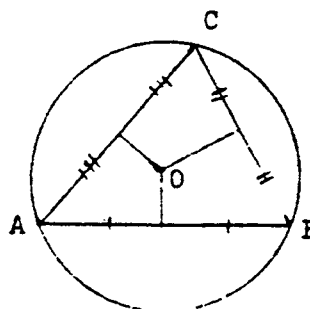
Vi skall ge ett antal satser om trianglar. Vi kommer därvid att använda standardbeteckningen $\triangle ABC$ med vinklarna A, B, C och sidorna $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.

För varje triangel finns en omskriven cirkel och en inskriven cirkel.

Den omskrivna cirkeln är en cirkel som går genom triangelns tre hörn.

Dess medelpunkt ligger lika långt från alla tre hörnen.

Den måste därför ligga på mittpunktsnormalerna till de tre sidorna. Att dessa råkas i en punkt (att alltså omskrivna cirkeln alltid existerar) inses så:



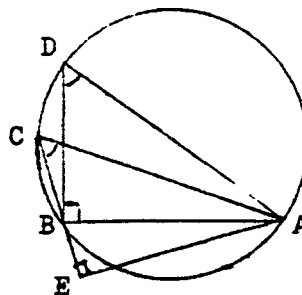
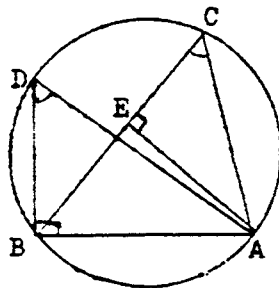
För skärningspunkten O mellan normalerna till sidorna AB och BC gäller $|OA| = |OB| = |OC|$. Alltså är $|OA| = |OC|$ och O ligger på

mittpunktsnormalen till sidan AC.

Sats 35. Om R är radien i den omskrivna cirkeln till $\triangle ABC$ med sidorna a, b, c och arean T , så är

$$R = \frac{abc}{4T}$$

Bevis. Låt beteckningarna vara valda så att $\angle C$ är spetsig. Drag diametern AD i den omskrivna cirkeln. Då är $\angle ABD$ rät. D ligger på bågen ACB så att



$\angle ADB = \angle C$ (randvinkelsatsen). Drar man därför höjden AE mot sidan BC får man $\triangle DBA \sim \triangle CEA$ varur, om $h = |AE|$,

$$\frac{|DA|}{|CA|} = \frac{|BA|}{|EA|} \quad \frac{2R}{b} = \frac{c}{h}$$

Då $T = \frac{1}{2} ah$ följer satsen. Bev.

Triangeln DBA ger också sambandet

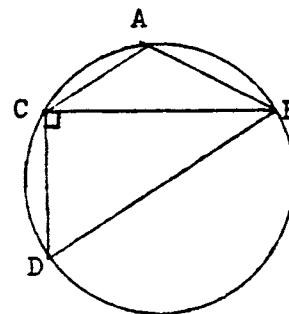
$$c = 2R \sin \angle BDA = 2R \sin C$$

Motsvarande gäller för A och B (härledningen fungerar på grund av sats 32 även då A eller B är rät eller trubbig, se fig.). Detta ger ett bevis för sin-satsen, vilken får formen .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Den inskrivna cirkeln är den cirkel som ligger i triangeln och tangerar alla tre sidorna. Dess medelpunkt ligger lika långt från alla tre sidorna.

Den måste alltså ligga på bisektriserna



$$\begin{aligned} \angle D + \angle A &= 2R \\ \sin A &= \sin D \\ a &= 2R \sin D \end{aligned}$$

till triangelns tre vinklar. Att bisektriserna alltid råkas i en punkt (och inskrivna cirkeln alltså existerar) inses så: Skärningspunkten mellan bisektriserna till vinklarna A och B har samma avstånd till sidorna AB och AC och samma avstånd till sidorna BA och BC, alltså samma avstånd till sidorna AC och BC. Den ligger därför på bisektrisen till vinkeln C.

Kalla inskrivna cirkelns radie r . och sätt $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Sats 36. För inskrivna cirkelns radie r gäller $T = rp$.

Bevis. Bisektriserna, dragna fram till inskrivna cirkelns medelpunkt delar triangeln i tre trianglar, alla med höjden r .

Vi får

$$T = \frac{1}{2} ra + \frac{1}{2} rb + \frac{1}{2} rc = rp$$

Bev.

Den inskrivna cirkelns tangeringspunkter delar triangelns tre sidor i sex delar, som är parvis lika, se figuren.

Man får

$$x + y = c \quad x + z = b \quad y + z = a$$

vilket ger

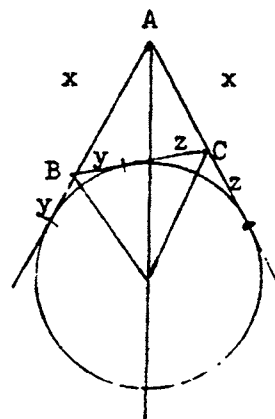
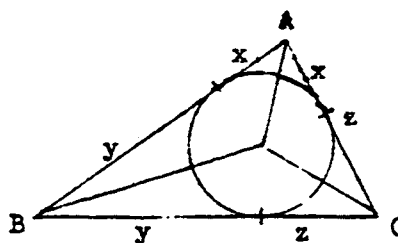
$$x = p - a \quad y = p - b \quad z = p - c$$

En triangel har också tre vidskrivna cirklar. En vidskrivna cirkel ligger utanför triangeln och tangerar en sida i triangeln och de båda återstående sidornas förlängningar. Den vid sidan BC vidskrivna cirkelns medelpunkt ligger på bisektrisen till A och på de yttre bisektriserna till B och C (dvs bisektriserna till dessa vinklars sidovinklar).

Sats 37. För den vid BC vidskrivna cirkelns radie r_a gäller $T = r_a(p - a)$.

Bevis. T erhålles denna gång som skillnaden mellan summan av areorna för två trianglar och arean för en tredje alla med höjden r_a :

$$T = \frac{1}{2} cr_a + \frac{1}{2} br_a - \frac{1}{2} ar_a = r_a(p - a). \quad \text{Bev.}$$



Med beteckningarna i figuren får man denna gång

$$x - y = c \quad x - z = b \quad y + z = a$$

vilket ger

$$x = p \quad y = p - c \quad z = p - b$$

Sats 38. (Hérons formel). I en triangel med sidorna a, b, c (och omkretsen $2p$) är arean T given av

$$T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bevis. Bisektrisen till $\triangle ACB$ och bisektrisen till dess sidovinkel är vinkelräta. Dras därför de två radier som är normaler till linjen AC , en i den inskrivna cirkeln och en i den vid BC vidskrivna cirkeln bildar dessa med C två likformiga trianglar, se fig. Härav

$$\frac{r}{p-b} = \frac{p-c}{r_a} \quad rr_a = (p-b)(p-c)$$

Av de två föregående satserna har vi emellertid $T^2 = rr_a p(p-a)$. Härav erhålles satsen.

Bev.

Med hjälp av Herons formel kan vi skriva inskrivna cirkelns radie:

$$r = \frac{T}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

och motsvarande för vidskrivna cirkelns radie.

Sats 39. (Bisektrissatsen). Bisektrisen till $\angle C$ i $\triangle ABC$ delar sidan AB i två delar som förhåller sig till varandra som $|AC|/|BC|$.

Bevis. Låt bisektrisen skära AB i D . Förläng sidan AC över C till E med

$$|CE| = |CB|.$$

$\triangle CEB$ likbent. Basvinkelsatsen och yttervinkelsatsen ger

$$\angle CEB = \angle CBE = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle ACD$$

Alltså är CD och EB parallella. Transversalsatsen ger därför

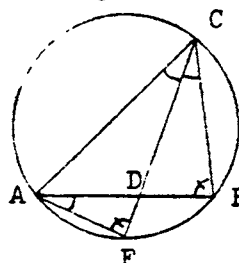
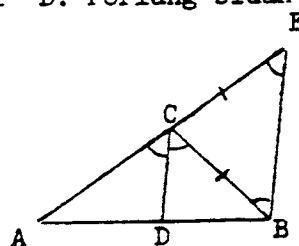
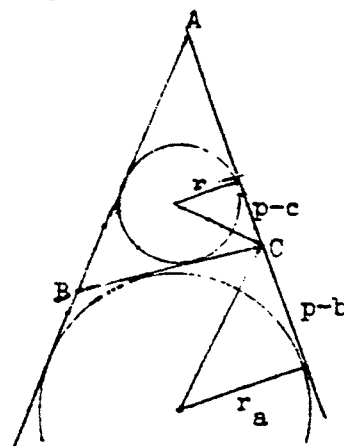
$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Bev.

Vi ger några alternativa bevis.

Tag på den omskrivna cirkeln mittpunkten F på bågen AB (den båge som inte innehåller C).

Då är $\angle ACF = \angle FCB$ (vinklar i samma cirkel stående på lika stora bågar). CF är alltså bisektris till $\angle C$. Randvinkel-



satsen ger $\angle AFC = \angle ABC$. Härav erhålles lätt

$$\triangle ADF \sim \triangle CDB \sim \triangle CAF$$

Detta ger

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AF|}{|BC|} \quad \frac{|BD|}{|AF|} = \frac{|CD|}{|AC|}$$

varav

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Ett tredje bevis utnyttjar areor. Triangelarna ACD och BCD kan på två sätt uppfattas som trianglar med lika stor höjd; då förhåller sig deras areor till varandra som baserna. Det ena paret baser är AD och BD . Det andra paret baser är AC och BC , ty D , som ligger på bisektrisen till $\angle ACB$, ligger lika långt från AC som från BC . Alltså

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\text{area}(\triangle ADC)}{\text{area}(\triangle BDC)} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

Vi påpekar också att bisektrissatsen lätt följer från sin-satsen, eftersom $\sin \angle ADC = \sin \angle BDC$.

Några av ovanstående satser är svåra att direkt bevisa med koordinaträkning eller vektorräkning. Som kontrast anger vi nu några satser om medianerna i en triangel för vilka vektorräkning är ett naturligt hjälpmedel. En median är en sträcka som sammanbinder ett hörn i en triangel med mittpunkten på motstående sida.

Sats 40. De tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt, kallad triangelns tyngdpunkt. Dess avstånd till ett hörn är två tredjedelar av längden av medianen från hörnet.

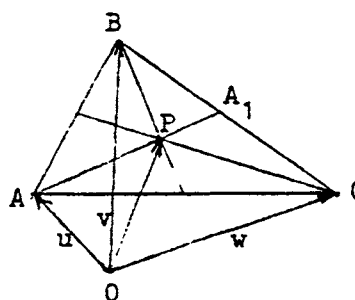
Bevis. Låt triangeln vara ABC och låt O vara ett origo. Inför vektorerna $u = \vec{OA}$, $v = \vec{OB}$, $w = \vec{OC}$. Tag P som den punkt för vilken $\vec{OP} = \frac{1}{3}(u + v + w)$. Då är

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = -u + \frac{1}{3}(u + v + w) = \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w - \frac{2}{3}u$$

Kalla mittpunkten på BC för A_1 . Då är $\vec{OA_1} = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$, $\vec{AA_1} = -u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w$. Alltså är $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AA_1}$. Härav följer satsen. Bev.

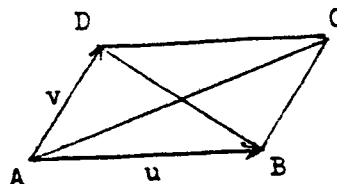
Utan vektorer kan satsen bevisas genom att man genom mittpunkten på en sida i triangeln drar linjer parallella med de båda andra medianerna och tillämpar transversalsatsen.

För att beräkna längden av en median betraktar vi först parallelogrammer.



Sats 41. (Parallelogramlagen). I en parallelogram är summan av kvadraterna på diagonalerna likamed summan av kvadraterna på alla fyra sidorna.

Bevis. Låt u och v vara vektorerna från ett hörn i parallelogrammen till de båda närmaste hörnen. Då är diagonalerna givna av $u + v$ och $u - v$. Alltså är



$$\begin{aligned} |u + v|^2 + |u - v|^2 &= (u + v | u + v) + (u - v | u - v) = \\ &= |u|^2 + 2(u | v) + |v|^2 + |u|^2 - 2(u | v) + |v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 \end{aligned}$$

Bev.

Man kan få ett motsvarande bevis genom att använda komplexa tal och likheten $|z|^2 = z \bar{z}$. Ett bevis utan vektorer kan lätt erhållas om man drar normalerna mot AB från punkterna D och C och använder Pytagoras' sats tre gånger.

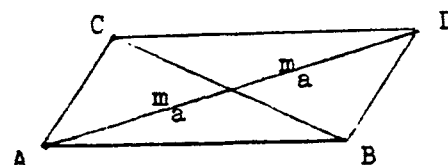
Sats 42. Längden m_a av medianen från A i $\triangle ABC$ satisfierar

$$4m_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

Bevis. Konstruera parallelogrammen med sidorna AB och AC.

Tillämpa parallelogramlagen. Bev.

Sats 43. Höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.



Bevis. Drag genom varje hörn i triangeln linjen parallell med motstående sida. Dessa linjer ger en ny triangel. Höjderna i den ursprungliga triangeln är mittpunktsnormaler till den nya triangeln.

Dessa råkas i en punkt.

Bev.

Ett annat bevis

kan erhållas med vektor-

räkning. Tag skärningspunkten P mellan höjderna från B och C och inför $u = \vec{PA}$, $v = \vec{PB}$, $w = \vec{PC}$.

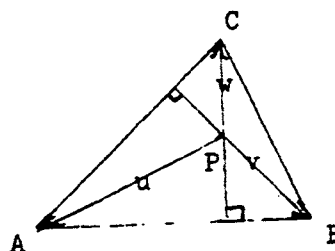
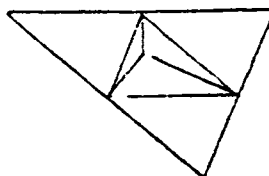
Då är v ortogonal mot $u - w$

och w ortogonal mot $u - v$.

Alltså är

$$(v | u) - (v | w) = 0$$

$$(w | u) - (w | v) = 0$$



Härav följer $(v|u) - (w|u) = 0$, vilket visar att u är ortogonal mot $v - w$, så att u har samma riktning som höjden från A . Alltså går denna höjd genom P .

4.13 Konstruktion med passare och linjal

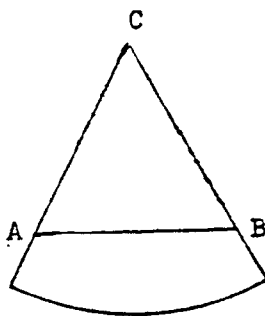
Hos Euklides förekommer ett antal konstruktionsproblem. Dessa tjänstgör närmast som existenssatser. Innan Euklides exempelvis använder mittpunkten på en sträcka visar han att denna kan konstrueras.

Euklides' konstruktioner görs med passare och linjal. Närmare bestämt bygger de på de två möjligheterna att dra en linje genom två givna punkter och att rita en cirkel med given medelpunkt genom en given annan punkt. I första hand måste Euklides visa att han kan flytta sträckor och vinklar. Eftersom vi ovan har arbetat med kongruenstransformationer, dvs "förflyttning av hela geometrin", har denna aspekt på den klassiska euklidiska geometrin bortfallit. Observera emellertid att detta inte är egenskaper hos geometrin utan hos de speciella begränsningar som endast tillåter uppritande av linjer och cirklar så som just beskrivits.

För att avsätta en given sträcka från en given punkt kan Euklides inte direkt använda passaren. Han kan ju endast använda passaren för att rita cirklar genom redan givna punkter. Man skulle kunna säga "Euklides' passare slår ihop så fort den lämnar papperet". Emellertid klarar Euklides detta på följande sätt. Han vill flytta en sträcka med ena ändpunkten A till en lika lång sträcka med ena ändpunkten vid B . Han uppritar då en liksidig triangel ABC (genom att ta A och B som medelpunkter till cirklar genom resp B och A ; C är ena skärningspunkten mellan cirkelarna). Därefter avsätter han den vid A givna sträckan på CA 's förlängning över A . Med en cirkel med medelpunkt C överföres sträckan till en lika lång sträcka på CB 's förlängning över B . På detta vis kan sträckor flyttas.

Vinklar flyttas väsentligen genom andra kongruensfallet.

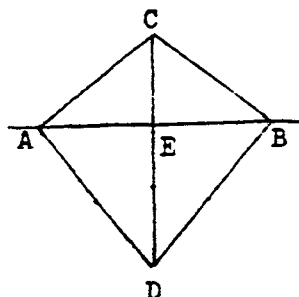
Man ritas upp en triangel som har den givna vinkeln som en av sina vinklar (denna triangel kan tas likbent) och ritas sedan upp en annan triangel med samma sidor.



Existensen av mittpunkt på en sträcka och existensen av en rät vinkel klaras också med kongruensläran. Väsentligen sker detta på följande sätt. På sträckan AB som bas byggs två likbenta triangler ACB och ADB , en på vardera sidan om AB . CD skär AB i E . Då är enligt andra kongruensfallet $\triangle CAD \cong \triangle CBD$, speciellt $\angle ACD = \angle BCD$. Härav följer enligt första kongruensfallet

$\triangle ACE \cong \triangle BCE$ vilket ger

$|AE| = |EB|$ och $\angle AEC = \angle BEC$.



Motsvarande konstruktion görs då man vill dra normalen till linjen från en punkt utanför linjen. Då är punkten C given och man konstruerar först A och B på linjen som skärningspunkterna mellan linjen och en cirkel med C som medelpunkt. Konstruktionen fungerar även om man vill dela en vinkel mitt itu. Då är strålarna CA och CB givna. A och B erhålls som skärningarna mellan vinkelbenen och en cirkel med vinkelspetsen C som medelpunkt.

Vid två tillfällen använder emellertid Euklides förflyttningar som han inte konstruerar (med passare och linjal) nämligen vid bevisen för första och andra kongruensfallen. Hans bevis är väsentligen desamma som de som gavs i avsnitt 4.5. Han gör förflyttningar och utnyttjar därvid just den existens och entydighet som vi preciserat i ABS 4)d).

Appendix 4. Några satser i sfärisk geometri.

Kortaste kurvan på en sfärisk yta mellan två punkter på ytan är storcirkelbågen. Det är därför naturligt att man, om man vill undersöka sfärens geometri, tar storcirklar och storcirkelbågar som motsvarighet till linjer och sträckor.

Man ser genast att sfärens geometri inte uppfyller axiomen för absolut geometri. Två olika storcirklar skär alltid varandra i 2 punkter. Man har inga parallella "linjer". Punkterna på en "linje" är inte ordnade

som de reella talen.

Trots detta finns likheter mellan sfärisk geometri och den icke-euklidiska geometri, som utvecklas i avsnitten 4.8, 4.9 och 4.11. Vi vill här visa upp ett par sådana likheter.

En sfärisk triangel består av 3 punkter på sfären (hörnena) och 3 storcirkelbågar sammanbindande dem parvis (sidorna). Kalla hörnen A, B, C och motstående sidors längder a, b, c. Vid varje hörn bildar sidorna en vinkel; vi låter även A, B, C beteckna dessa vinklar. För att mäta sidornas längder antar vi att sfären har radien 1 och kan då mäta längden av en storcirkelbåge med vinkeln mellan radierna i sfären till bågens ändpunkter (vinklar mäts i radianer).

Låt oss beräkna arean av en sfärisk triangel.

Hela sfären har arean 4π . Två storcirklar skär varandra i ett par diametralt belägna punkter, s.k. antipoder och delar sfärens yta i 4 områden, som vi kallar tvåhörningar. En tvåhörning i vilken de båda vinklarna är α utgör $\alpha/2\pi$ av hela sfären varför dess area är $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\alpha$.

En sfärisk triangel T i vilken sidorna är mindre än π , har tre vidskrivna trianglar T_A, T_B, T_C . Dras nämligen storcirkelbågarna AB och AC ut över B och C till A:s antipod A' bildar dessa förlängningar tillsammans med sidan BC en sfärisk triangel, som vi kallar T_A . Likaså erhålles T_B och T_C . Låt T, T_A, T_B, T_C även beteckna triangelareorna.

Vi inser nu att $T + T_A + T_B + T_C$ är halva sfärens area. Ty de tre storcirkelarna AB, AC och BC delar sfären i 8 triangulära områden, vilka är parvis kongruenta eftersom de ligger antipodiskt. T, T_A, T_B, T_C är en av vardera av de 4 paren. Alltså

$$T + T_A + T_B + T_C = 2\pi$$

Men T och T_A bildar tillsammans

en tvåhörning med vinkel A. Enligt vad som bevisades ovan är alltså

$$T + T_A = 2A$$

Likaså

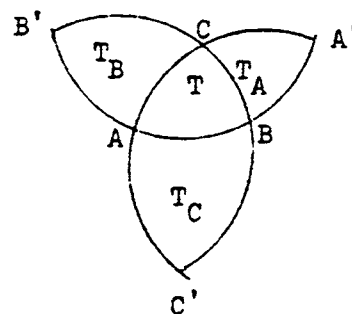
$$T + T_B = 2B$$

$$T + T_C = 2C$$

Elimineras T_A, T_B, T_C ur de fyra erhållna likheterna får man

$$T = A + B + C - \pi$$

Vi ser alltså att vinkelsumman i en sfärisk triangel alltid är större än två rätta. Man brukar kalla skillnaden $A + B + C - \pi$ för



triangelns excess. Excessen är således ett mått på arean. Detta kan jämföras med resultatet inom icke-euklidisk geometri att defekten är ett mått på arean (se avsnitt 4.11).

Som ett andra exempel på likhet mellan sfärisk och icke-euklidisk geometri tar vi motsvarigheten till Pytagoras' sats. Låt sfären ges av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En rätvinklig sfärisk triangel med kateterna a och b kan läggas med den räta vinkeln i $C = (0, 0, 1)$ och de båda övriga hörnen i

$$A = (\sin b, 0, \cos b) \quad \text{och} \quad B = (0, \sin a, \cos a)$$

Skalära produkten ger

$$\cos c = ((\sin b, 0, \cos b) | (0, \sin a, \cos a)) = \cos a \cos b$$

Detta kan jämföras med motsvarande resultat inom icke-euklidisk geometri (se avsnitt 4.9).

PROBLEM till KAPITEL 4

Absolut geometri (avsnitt 4.2 - 4.6)

42. Bevisa i absolut geometri följande kongruensfall (Euklides, variant av tredje kongruensfallet): Om i trianglarna ABC och $A'B'C'$ gäller $|AB| = |A'B'|$, $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$, så är trianglarna kongruenta.

43. Bevisa i absolut geometri följande kongruensfall (det s.k. fjärde kongruensfallet): Om i trianglarna ABC och $A'B'C'$ gäller $|AB| = |A'B'| > |AC| = |A'C'|$ och $\angle C = \angle C'$ så är trianglarna kongruenta. (Finns hos Euklides icke som kongruensfall men som lik-

formighetsfall.)

44. Visa i absolut geometri att om i $\triangle ABC$ vinkeln C är rät och D är en inre punkt på sträckan BC , så är $|AD| < |AB|$.
45. Bevisa i absolut geometri satsen att om en transversal skär två linjer i punkterna A och B med lika alternatvinklar, så är linjerna parallella (sats 11, avsnitt 4.6) genom att betrakta en kongruenstransformation som överför A i B och B i A .

Icke-euklidisk geometri i Kleins modell (avsnitt 4.8, 4.9)

46. Låt $(-\frac{1}{3}, 0)$ och $(\frac{1}{3}, 0)$ vara givna. Bestäm $(0, c)$, $c > 0$, så att man får en liksidig triangel (i i.-e. mening). Bestäm cosinus för en av vinklarna i triangeln.
47. Bestäm den linje som är i.-e. vinkelrät mot både x -axeln och linjen $x - 3y + 2 = 0$.
48. Bestäm mängden av i.-e. fotpunkter på $x = \frac{1}{2}$ för normalerna från punkterna på den i.-e. linjen $x = 0$.
49. Ange på formen (1) (sid 110) den i.-e. förflyttning som är en translation längs $y = x$ och flyttar $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ till origo.
50. Bestäm den i.-e. spegelbilden av punkten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ i linjen $y = \frac{1}{2}$.
51. Låt $A = (0, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, 0)$, $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $D = (0, \frac{1}{2})$, $E = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Bestäm den i.-e. största och den i.-e. minsta bland sträckorna $AB, BC, AE, BE, CE, AC, BD$.
52. $ABCD$ är en fyrhörning i i.-e. geometri med vinklarna B, C, D räta. P är en punkt på sträckan AB . Man drar normalerna från P mot CD och AD . Härigenom delas fyrhörningen i dels två nya fyrhörningar med tre räta vinklar, dels en rätvinklig triangel. Visa att varje rätvinklig triangel kan erhållas på detta sätt.

Area i icke-euklidisk geometri (avsnitt 4.11)

53. Visa att om D betecknar ett område i i.-e. planet, så uppfyller

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$$

$AR1) - AR3)$ och $ARI4)$.

54. Bestäm defekten för fyrhörningen i i.-e. planet med hörnen $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b) , $(0, b)$ där $a > 0$, $b > 0$, $a^2 + b^2 < 1$.

55. Beräkna integralen i problem 53 över fyrhörningen i problem 54.
56. Bevisa det s.k. femte kongruensfallet (se slutet av avsnitt 4.11).

Euklidisk geometri (avsnitt 4.7, 4.10, 4.12)

57. Två cirkelar tangerar varandra i A. Man drar genom A två vinkelrätta kordor AB och AC, en i vardera cirkeln. Visa att radierna till B och C är parallella.
58. I $\triangle ABC$ är $|AB| = |AC|$. D är en punkt på sidan BC. Linjen AD skär den kring $\triangle ABC$ omskrivna cirkeln i A och E. Bevisa att $\angle ADB = \angle ABE$.
59. I $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$ är $AC = AD$. Punkterna C och D ligger på samma sida om linjen AB. Visa att A, B, C, D ligger på en cirkel. (Randvinkelsatsens omvändning.)
60. Drag normalerna från en punkt P inuti en liksidig triangel mot triangelns sidor. Visa att summan av dessa normalers längder är likamed längden av triangelns höjd.
61. Punkterna A och B och vinkeln C är givna i $\triangle ABC$. Då C varierar (på ena sidan om basen AB) beskriver inskrivna cirkeln medelpunkt en cirkelbåge. Bevisa detta. Visa att resten av cirkeln beskrivs av den vid AB vidskrivna cirkeln medelpunkt.
62. Två cirkelar skär varandra i A och B. En gemensam tangent tangerar ena cirkeln i P och andra cirkeln i Q. Visa att $\angle PAQ + \angle PBQ = 2R$.
63. Två cirkelar skär varandra i A och B. Från en punkt C på sträckan AB:s förlängning dras två tangenter, en till vardera cirkeln, med tangeringspunkter P resp Q. Visa att $|CP| = |CQ|$.
64. Två cirkelar skär varandra i A och B. P är en punkt på den ena cirkeln. Linjerna PA och PB skär den andra cirkeln i C resp D. Visa att kordan CD är parallell med tangenten i P.
65. Två cirkelar skär varandra i A och B. Tag två punkter C, D på ena cirkeln och två punkter E, F på andra cirkeln så att C, A, E ligger på en linje och D, B, F ligger på en parallell linje. Visa att $|CE| = |DF|$.
66. På den omskrivna cirkeln till en liksidig triangel ABC ligger en punkt D mellan B och C. Låt E vara skärningen mellan linjerna AB och CD och låt F vara skärningen mellan linjerna

AC och BD. Visa att produkten av $|BE|$ och $|CF|$ är oberoende av D:s läge.

67. (Satsen om bisektrisens längd). Bisektrisen till $\angle C$ i $\triangle ABC$ skär AB i D. Visa att

$$|CD|^2 = |AC| \cdot |BC| - |AD| \cdot |BD|$$

68. Betrakta trianglar ABC med tyngdpunkt T för vilka $AT > BT > CT$. Det finns konstanter $k_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 6$, sådana att för alla dessa trianglar gäller

$$k_1|AB| < |AT| < k_2|AB|$$

$$k_3|AB| < |BT| < k_4|AB|$$

$$k_5|AB| < |CT| < k_6|AB|$$

Visa detta och bestäm de bästa konstanterna (dvs största möjliga k_1, k_3, k_5 och minsta möjliga k_2, k_4, k_6).

Euklidisk geometri, konstruktioner (avsnitt 4.13)

Vid lösandet av följande problem anses det bekant att man kan

- dra en linje genom två givna punkter,
- upprita en cirkel med given medelpunkt och given radie,
- flytta en sträcka,
- flytta en vinkel,
- halvera en sträcka,
- halvera en vinkel,
- dra normalen till en linje genom en given punkt,
- dra en parallell till en linje genom en given punkt (gör alternativt vinklarna lika),
- på en given sträcka upprita en triangel med givna vinklar,
- på en given sträcka upprita ett cirkelsegment innehållande en given vinkel (gör medelpunktsvinkeln dubbelt så stor).

I vissa av problemen får man förutsätta att givna data är sådana att konstruktionen är möjlig (exempelvis i problem 70 får linjen inte ligga för långt från cirkeln).

I vissa av problemen föreligger olika fall som då bör redovisas (exempelvis i problem 71 kan cirkelarna ligga utanför varandra eller den ena omsluta den andra).

69. Drag från en given punkt utanför en cirkel en tangent till cirkeln.
70. Bestäm på en given linje en punkt från vilken en given cirkel syns under en given vinkel.

71. Upprita en cirkel som tangerar en given cirkel i en given punkt och som dessutom tangerar en given linje.
72. Inskriv i en given cirkel en triangel med givna vinklar.
73. Drag genom en given punkt en linje så att den skär en given cirkel och därvid bildar en korda med given längd.
74. Konstruera en romb (= parallelogram med alla sidorna lika långa) när sidans längd och den i romben inskrivna cirkelns radie är givna.
75. Upprita en triangel då man känner en vinkel, motstående sidas längd och längden av medianen till denna sida.
76. Inskriv i en kvadrat en mindre kvadrat med given sidlängd.
77. Två cirklar utanför varandra är givna. Drag en linje som tangerar båda cirkelarna.
78. Konstruera en rätvinklig triangel där hypotenusan är given och där sträckan mellan de om- och inskrivna cirkelarnas medelpunkter bildar en given vinkel med hypotenusan.
79. Konstruera en triangel då en sida samt de in- och omskrivna cirkelarnas radier är givna.
80. Bestäm på en given linje en sträcka som från två givna punkter syns under rät vinkel.
81. En cirkel, en korda i denna och en punkt är givna. Drag genom punkten en linje vars inom cirkeln belägna del halveras av kordan.

INDEX

- absolut geometri 86, 90
- alla 29
- allkvantorn 29
- alltså 12
- alternativinklar 100
- andra komponenter: 50
- andra kongruensfallet 97
- andra likformighetsfallet 107
- annars 12
- antagande 10
- antal 68
- antingen - eller 20
- antipod 143
- anti-reflexivitet 54
- area (euklidisk) 118
- area (icke-euklidisk) 125
- associativitet 67, 73
- avstånd 89
- axiom 10
- Banach - Tarskis exempel 59
- bas (vektorer) 88
- bas (triangel) 120
- basvinkel 97
- basvinkelsatsen 97
- basvinkelsatsens omvändning 98
- bevis 10
- beteckning 7
- bijektion 53
- bijektiv 53
- bisektris 95
- bisektrissatsen 133
- bisektrisens längd 153
- bunden bokstav 26
- Cauchyföljd (rationell) 77
- Cauchyföljd (reell) 82
- cirkelsegment 129
- cosinussatsen 109
- Dedekind-snitt 74
- defekt 126
- definition 10
- delmängd 47
- det vill säga 18
- determinant 44
- differensmängd 47
- disjunkt 50
- disjunktion 20
- distributivitet 67, 73
- dvs 18
- då (adverb) 11
- då (konjunktion) 15
- eftersom - så 15
- ekvivalens 18
- ekvivalensklass 55
- ekvivalensrelation 55
- ekvivalent 18, 55
- element 46
- eller 20
- endast 33
- enhet (i grupp) 139
- enhetsvektor 89
- enkel induktion 63
- entydig 33
- Euklides' parallellaxiom 103
- excess 144
- existera 30, 52
- existenskvantor 30
- exponentialfunktionen 41
- fall 20
- falsk 12
- familj av mängder 48
- femte kongruensfallet 128
- Fibonacci-talen 148
- finns 30
- fjärde kongruensfallet 150

- fotpunkt 96
 fri bokstav 27
 funktion 52
 fullständig induktion 65
 förflyttning 90, 111
 första komponent 50
 första kongruensfallet 97
 första likformighetsfallet 106
 generera 88
 godtycklig 28
 grundmängd 49
 grupp 139
 gäller 9
 Gödels sats 69
 halvplan 91
 Heine-Borels lemma 82
 hela tal 7
 Herons formel 133
 hypotenusan 107
 högerderivata 150
 högst 33
 höjd 119, 120, 135
 icke-euklidisk geometri 109
 identiteten 139
 implicera 14
 implikation 13
 indirekt bevis 12
 induktion 63, 65, 66
 induktionsantagande 63
 induktionssteget 63, 65
 införd bokstav 28
 injektion 53
 injektiv 53
 innervinkel 96
 inskriven cirkel 131
 insättning 27
 inte 11
 integral 42
 intervallinkapsling 82
 invers (i grupp) 139
 invers (funktion) 53
 isomorf 53, 54
 kan 31
 katet 107
 Kleins modell 109
 kommutativitet 67, 73
 komplement 47
 komplexa tal 84
 komponent 50
 kongruensfall 97, 98, 150, 128
 kongruenstransformation 89, 90, 111
 kongruent 91, 140
 konjunktion 17
 konnektiv 11
 kontrapositiva formen 16
 koordinater 89, 94
 koordinatsystem 89
 kordasatsen 129
 korda-tangent-satsen 129
 kvantifikator 28
 kvantor 28
 likbent triangel 97
 likformig 104
 likformighetsfall 106, 107
 likformigt 37
 likhet 9
 linje 89, 90, 109
 låt 11
 längd 89, 92, 116
 majorant 74
 medelpunktsvinkel 128
 medför 14
 median 134
 mittpunkt 93
 modell 38
 motexempel 36
 motsats 11
 motsatt ordning 54

- motsatt stråle 91
 motsägelse 12
 motsägelsefrihet 12
 mängd 46
 namn 8
 naturliga tal 48, 63
 negation 11
 neutralt element 139
 nollföljd 78
 normal 96
 normerad vektor 89
 något 30
 nödvändigt villkor 19
 oavgörbar 13
 och 17
 om - så 13
 omskriven cirkel 130
 omvändning 15
 ON-bas 89
 ON-system 89
 ordnad kropp 74
 ordnad mängd 54
 ordnat par 50
 ordning 54
 ordningsrelation 54
 ortogonal 89
 Ortsvektor 89
 par 50
 parallell 90
 parallellaxiomet 103
 parallellogram 104
 parallellogramlagen 135
 parentes 21, 27
 partiell ordning 54
 passare 136
 periferivinkel 128
 positiv Cauchy-följd 79
 potensmängd 50
 predikatslogiken 26
 prioritetsordning 21
 produktmängd 50, 54
 produktsatsen för determinanter 44
 punkt 86, 90, 109
 Pytagoras' sats 107, 124, 125
 Pytagoras' sats' omvändning 108
 randvinkel 128
 randvinkelsatsen 129
 randvinkelsatsens omvändning 152
 rationella tal 72
 rationella tal, axiomatik 41, 73
 reella tal, axiomatik 73
 reflexivitet 55
 rekursion 67
 rekursiv definition 67
 relation 51
 representant 55
 Riemann-integral 42
 Rolles sats 25
 romb 154
 Russells paradox 46
 rät vinkel 95
 Saccheris sats 100
 saknas 35
 sann 10, 9
 sanningstabell 23
 sanningsvärde 22
 sats 10
 satslogiken 11
 segment 129
 sfärisk geometri 142
 sfärisk triangel 143
 sidovinkel 95
 sinussatsen 109, 131
 skalär produkt 87, 108
 skild från 36
 slutet utsaga 27
 snitt (mängd) 48
 snitt (Dedekind-) 74

- spegling 92, 140, 110
 spetsig vinkel 96
 stråle 91
 sträcka 91
 substitution 27
 supremum 74
 surjektion 53
 surjektiv 53
 symmetri 55
 talpar 92
 tangenssatsen 109
 tautologi 21
 teorem 10
 term 7
 tillräckligt villkor 19
 tomma mängden 48
 topptriangelsatsen 106
 total ordning 54
 transformationsgrupp 139
 transitivitet 54, 55
 translation 110
 transversal 99
 transversalsatsen 105
 tredje kongruensfallet 98, 150
 tredje likformighetsfallet 107
 triangelolikheten 99
 trubbig vinkel 96
 tvåhörning 143
 tyngdpunkt 134
 union 48
 uppfylld 9
 uppräknelig mängd 138
 urvalsaxiomet 50
 utgångspunkt (stråle) 91
 utsaga 7
 utsagologiken 11
 vare sig - eller 25, 26
 varje 29
 varken - eller 25
 vektor 86, 108
 vertikalvinkel 96
 vidskriven cirkel 132
 villkor 19
 vinkel 95
 vinkelben 95
 vinkelspets 95
 vinkelsumma 99
 välja 50
 välordningssatsen 51
 yttervinkel 96
 yttervinkelsatsen 128
 Zorns lemma 51
 äkta delmängd 47
 ändlig mängd 68
 öppen utsaga 27