Matematiska vetenskaper Chalmers

MVE365, Geometriproblem

Demonstration / Räkneövningar

1. Konstruera en triangel då två sidor och vinkeln mellan dem är givna.

2. Konstruera en triangel då tre sidor är givna.

3. Konstruera en triangel då en sida och vinklarna i dess ändpunkter är givna.

4. Konstruera en parallell linje till en given linje genom en given punkt.

5. Visa att bisektriserna till basvinklarna i en likbent triangel är lika långa.

6. Visa att motsvarande höjder i kongruenta trianglar är lika långa.

7. Visa att motstående sidor i en parallellogram är lika långa.

8. Visa att kateten som står mot vinkel $\frac{1}{3}R$ i en rätvinklig triangel är hälften så lång som hypotenusan i triangeln.

9. Givet är en rätvinklig triangel där en av kateterna har längden 12 l.e. (längdenheter) och motstående vinkel är $\frac{2}{3}R$. Bestäm (längden av) höjden till hypotenusan.

10. Konstruera vinkel **(a)** $\frac{2}{3}R$; **(b)** $\frac{1}{3}R$.

11. Konstruera en romb givet **(a)** sida och en vinkel; **(b)** höjd och en diagonal.

12. Konstruera en sträckas **(a)** mittpunkt; **(b)** mittpunktsnormal.

13. Konstruera normalen till en linje genom en given punkt **(a)** utanför; **(b)** på linjen.

14. Konstruera bisektrisen till en given vinkel.

15. Konstruera en parallellogram givet en sida och två diagonaler.

16. Formulera och bevisa speciella likformighetsfall för **(a)** likbenta; **(b)** rätvinkliga trianglar.

17. Låt AP och BQ vara höjder i triangeln $\triangle ABC$ ($P \in BC, Q \in AC$). Visa att trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle PQC$ är likformiga.

18. Visa att höjderna i en triangel är bisektriser till vinklarna i triangeln med hörn fotpunkterna till höjderna i den givna triangeln.

19. Givet är romben $ABCD$. Den räta linjen l genom A skär förlängningarna till BC och CD i punkter P resp. Q. Visa att $|AB|^2 = |BP|\,|DQ|$.

20. Givet är en likbent triangel med baslängd 3 l.e. och benlängd 6 l.e. En sträcka parallell med basen är lika lång som sträckan den skär av triangelns ben räknat från bashörnet. Bestäm sträckans längd.

21. Givet är den räta linjen l och punkter $A, B \in l$. Punkterna E och F är sådana att EA och FB är ortogonala mot l och F befinner sig på samma sida om l som E. Punkten C ligger på sträckan AB och är sådan att $\frac{|AC|}{|BF|} = \frac{|AE|}{|CB|}$. Visa att vinkel ECF är rät.

22. Givet är två trianglar med gemensam bas, lika höjder till den och som ligger på samma sida om basen. Den räta linjen l är parallell med trianglarnas bas och skär deras återstående sidor. Visa att sträckorna, som de båda trianglarnas sidor skär av l, är lika långa.

23. Givet är en likbent triangel med baslängd 12 och benlängd 10 (längdenheter). Beräkna avståndet från bisektrisernas skärningspunkt till triangelns topp (dvs hörnet som bildas av benen).

24. Dela en given sträcka i **(a)** tre; **(b)** n lika delar.

25. Givet en sträcka med längden a, konstruera en sträcka med längden

    (a) $a\sqrt{2}$; **(b)** $a\sqrt{3}$; **(c)** $a\sqrt{n}$.

26. Givet är en cirkel och en punkt P innanför cirkeln. Bestäm mängden av mittpunkterna till alla kordor genom P.

27. Konstruera mängden av punkter från vilka en given sträcka syns under en given vinkel.

28. Konstruera en triangel givet en sida, motstående vinkel och

    (a) höjd; **(b)** median till den givna sidan.

29. Konstruera en rätvinklig triangel där den ena spetsiga vinkeln är $\frac{1}{3}R$ och medianen till hypotenusan är given.

30. Konstruera en rätvinklig triangel givet hypotenusan och medianen till en av kateterna.

31. Konstruera en triangel givet två vinklar och radien till den inskrivna cirkeln.

32. Givet är en cirkel och två (icke diametralt motsatta) punkter B och C på den. Tangenterna till cirkeln genom B och C skär varandra i punkten A. Tangenten genom en punkt på den mindre bågen BC skär AB och AC i K, resp. L. Om $|AC| = a$, bestäm triangeln $\triangle AKL$:s perimeter.

33. Visa att i en rätvinklig triangel är summan av diametrarna till den omskrivna och den inskrivna cirkeln lika med summan av de båda kateterna.

34. Konstruera en triangel givet: **(a)** en sida, vinkeln i dess ena ändpunkt och radien till den inskrivna cirkeln; **(b)** en sida, höjden till en av de andra sidorna och radien till den inskrivna cirkeln; **(c)** en vinkel, höjden från samma hörn och radien till den inskrivna cirkeln; **(d)** en vinkel, höjden genom ett av de andra hörnen och radien till den omskrivna cirkeln.

35. Visa att i en godtycklig fyrhörning ligger diagonalernas mittpunkter och skärningspunkten mellan sträckorna, som sammanbinder sidornas mittpunkter, på en rät linje (= i linje).

36. Givet är triangeln $\triangle ABC$ och punkten P på den omskrivna cirkeln. Visa att fotpunkterna till normalerna från P till triangelns sidor ligger i linje.

37. Använd likformighet för att konstruera en rätvinklig triangel givet en av de spetsiga vinklarna och radien till den inskrivna cirkeln.

38. Konstruera en cirkel som tangerar en given cirkel och två givna räta linjer genom den givna cirkelns medelpunkt.

39. Givet är en liksidig triangel $\triangle ABC$, inskriven i en cirkel. Punkten M ligger på den mindre bågen AB och är sådan att $|AM| = 8,\ |BM| = 7$. Bestäm $|CM|$.

40. Givet är sträckan AB, dess mittpunkt O och punkten M som ligger på sträckan AO. Normalen till AB genom M skär halvcirklarna med diametrar AO resp. AB (och på samma sida om AB) i punkter C resp. D. Visa att $|AC|$ och $|AD|$ kan vara katetens och hypotenusans längder i en likbent rätvinklig triangel.

41. Givet är fyra sträckor med längderna a, b, c, d. Konstruera en sträcka med längden x där **(a)** $x = a + b$; **(b)** $x = a - b$; **(c)** $x = \frac{ab}{c}$; **(d)** $x = \sqrt{ab}$; **(e)** $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; **(f)** $x = \sqrt{a^2 - b^2}, b < a$; **(g)** $x = \sqrt{ab - cd}, ab > cd$; **(h)** $x = 2^{\frac{1}{4}}a$.

42. Givet är en cirkel och en punkt utanför denna. Konstruera en linje genom den givna punkten som skär cirkeln så att sträckan från punkten till cirkeln är lika lång som sträckan innanför cirkeln.

43. Konstruera en rätvinklig triangel givet höjden till hypotenusan och **(a)** summan; **(b)** skillnaden av de båda kateterna.

44. Givet är den rätvinkliga triangeln $\Delta\, ABC$ med höjd till hypotenusan CD. Cirkeln med medelpunkt D och radie $|CD|$ skär kateten AC i punkten E och förlängningen till BC i punkten F. Visa att **(a)** E, D, F ligger i linje; **(b)** trianglarna $\Delta\, ABC$ och $\Delta\, FEC$ är likformiga; **(c)** punkterna A, E, B, F ligger på en cirkel.

45. Konstruera en fyrhörning där en sida och vinklarna i dess ändpunkter är givna om återstående tre sidor är lika långa.

46. Konstruera en liksidig triangel vars hörn ligger på tre givna parallella linjer och vars mittpunkt ligger på en given transversal till de parallella linjerna.

47. Låt CL vara bisektrisen till vinkeln C i triangeln ΔABC. Inför beteckningarna: $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a, |CL| = l_c, |AL| = m, |BL| = n$. Visa att $l_c^2 = ab - mn$.

48. Konstruera en triangel där två sidor och **(a)** höjden; **(b)** medianen; **(c)** bisektrisen från hörnet mellan dem är givna.

49. Givet är den konvexa fyrhörningen $ABCD$ vars diagonaler skär varandra i punkten O. Låt S, S_1, S_2, S_3 vara areorna till $ABCD$, $\triangle AOD$, $\triangle AOB$, $\triangle COD$ och antag att de uppfyller $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_1}$. Visa att **(a)** AB och CD är parallella; **(b)** $S_1 \leq \frac{1}{4}S$. När uppnås likhet?

50. Givet är en rätvinklig triangel. Visa att bisektrisen till den räta vinkeln även halverar vinkeln mellan höjden och medianen från samma hörn.

51. Konstruera en triangel givet de tre **(a)** höjderna; **(b)** medianerna.

    OBS! Det går inte att med hjälp av passare och linjal konstruera en triangel givet de tre bisektriserna.

52. Konstruera en triangel givet höjd, bisektris och median från samma hörn.

Dessutom uppgifter ur Olof Hanners kompendium.

Konstruktionerna skall utföras med hjälp av (låsbar) passare och linjal.

Uppgifter för egen räkning

53. Visa att medianerna till benen i en likbent triangel bildar lika vinklar med triangelns bas.

54. Givet är en likbent triangel med benlängd 3,5 och basvinkel $\frac{5}{6}R$. Bestäm höjden till triangelns ben.

55. Konstruera en kvadrat med given sidlängd.

56. Formulera och bevisa påståenden analoga med problem 6 för medianerna och bisektriserna i kongruenta trianglar.

57. Formulera och bevisa ett "fjärde likformighetsfall" som motsvarar "fjärde kongruensfallet".

58. Formulera och bevisa påståenden analoga med dem i problem 6 och 56 för likformiga trianglar.

59. Givet är den rätvinkliga triangeln $\triangle ABC$ där vinkeln $\angle C$ är rät. Avsätt på kateten BC:s förlängning sträcka CM sådan att $|CM| = |AC|$. Normalen ME till sidan AB ($E \in AB$) skär sidan AC i D. Visa att **(a)** $|BC| = |CD|$; **(b)** EC är bisektris i triangeln $\triangle BEM$.

60. Låt BM vara median i triangeln $\triangle ABC$ och antag att $\angle ABM = \angle ACB$. Visa att $|AC|^2 = 2|AB|^2$.

61. En kvadrat är inskriven i en triangel med bas 18 och höjd 9 så att en av kvadratens sidor ligger på basen. Bestäm kvadratens sidlängd.

62. Om beteckningarna är samma som i beviset för Pythagoras' sats (OH), visa att **(a)** $h_c^2 = a_1 b_1$; **(b)** $\frac{b^2}{a^2} = \frac{b_1}{a_1}$; **(c)** $\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

63. Höjden mot det ena benet i en likbent triangel delar benet i sträckor med längderna 2 (mot basen) och 7 (mot toppen). Bestäm basens längd.

64. En romb har perimeter 100 och dess ena diagonal har längd 30. Bestäm den andra diagonalens längd.

65. Visa att avståndet mellan två parallella linjer är konstant på linjen.

66. Bestäm mängden av fotpunkterna till normalerna från en given punkt till de räta linjerna genom en annan given punkt.

67. En korda delar cirkelns längd i förhållande 3:5. Bestäm korda-tangent vinkeln i kordans ena ändpunkt.

68. Låt MN vara diameter i en given cirkel och A, B vara fotpunkterna till normalerna från M resp. N till en av cirkelns tangenter. Visa att $|MA| + |NB| = |MN|$.

69. Konstruera en cirkel som tangerar en given linje i en given punkt och har sin medelpunkt på en annan given linje.

70. Konstruera en likbent rätvinklig triangel om den inskrivna cirkelns radie är given.

71. Givet är den inskrivna triangeln $\triangle ABC$. Höjderna till sidorna BC och AC skär den omskrivna cirkeln i punkter M resp. N. Visa att $|CN| = |CM|$.

72. Trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABF$ är rätvinkliga. Höjden FD i $\triangle ABF$ skär AC och BC (ev. förlängningar) i E resp. G. Visa att $|DF|^2 = |DE|\,|DG|$.

73. Givet är den liksidiga triangeln $\triangle ABC$. Finn punkter M, N på AB resp. AC sådana att $|AM| = |CN|$.

74. Konstruera två sträckor med längderna a och b så att $(a-b)^2 = ab$.

75. Givet är kvadraten $ABCD$ och två sinsemellan ortogonala räta linjer l_1 och l_2. Linjen l_1 skär sidorna AB och CD (ev. förlängningar) i punkter M resp. N; linjen l_2 skär BC och AD (ev. förlängningar) i P resp. Q. Visa att $|MN| = |PQ|$.

76. Konstruera en kvadrat som har givna mittpunkt och två punkter på två av sidorna. Hur många lösningar finns det beroende på punkternas läge?

Dessutom: uppgifterna i Olof Hanners kompendium.