MPLOL

MVE365 Ämnesdidaktisk problemlösning

Lösningar 7/3 - 2012

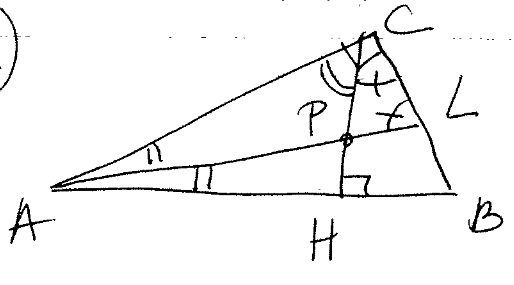
(1.) (i) Antag att $O \in$ en av triangelns sidor $\Rightarrow$ triangeln rätvinklig med hypotenusa $2R$; höjden mot hypotenusan $\leq R \Rightarrow$ arean $\leq R^2$

(ii) Antag att O utanför triangeln. Drag diameter $\parallel$ längsta sidan ($< 2R$). Längsta sidan och motstående hörnet är på samma sida om $O \Rightarrow$ höjden mot den $<$ "höjden" mot diametern $\leq R$ $\Rightarrow$ arean $< R^2$

Vi har alltså visat att:

arean $> R^2 \Rightarrow O$ innanför triangeln

(2.)



AL : bisektris till $\measuredangle A$

CH : höjd mot AB

$AL \cap CH = \{P\}$

$AP = PL$

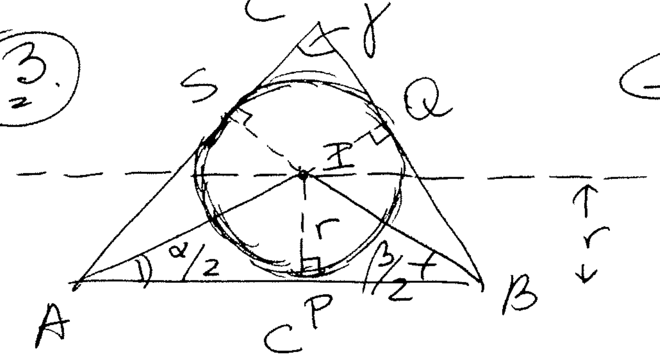
$\triangle ALC$ rätvinklig; CP median mot hypotenusan $\Rightarrow CP = AP = PL$

$\Rightarrow \measuredangle ACP = \measuredangle CAP = \frac{\alpha}{2}$

Men, $\measuredangle ACP = \measuredangle ACH = 90^\circ - \alpha = \beta$

$\Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$



③ 2

Givet: $AB = c$
$\angle C = \gamma$
r

Analys: Antag att den önskade $\triangle ABC$ är konstruerad.

AI, BI bisektriser $\Rightarrow \angle IAB = \frac{\alpha}{2}$
$\angle IBA = \frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow \angle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} =$
$= 180° - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180° - \frac{180°-\gamma}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2}$

$\Rightarrow I \in$ cirkelbåge, från vilken AB syns under vinkeln $90° + \frac{\gamma}{2}$

Dessutom: $I \in$ linje, parallell med AB, på avstånd r från AB

Konstruktion: Välj A, B s.a. $AB = c$

Drag linje $\parallel AB$, på avstånd r från AB; rita cirkelbåge, från vilken AB syns under vinkel $90° + \frac{\gamma}{2}$, på samma sida om AB som den parallella (till AB) linjen [grundkonstruktion]

Linjen och cirkelbågen skär varandra (se utredningen) i pkt I.

Rita cirkel med medelpkt I och radie r.

Drag tangenter till cirkeln (medelpkt I, radie r) från A o B; de skär varandra i C

Bevis. $AB = c$, och den inskrivna cirkeln har radie r per konstruktion 3

$? \measuredangle C = \gamma$

Beteckna med P, Q, S tangeringspkterna för inskrivna cirkeln med respektive AB, BC, CA

$\triangle API \cong \triangle ASI$ ("fjärde" k-f.)

$\Rightarrow \measuredangle PAI = \measuredangle SAI = \frac{\alpha}{2}$

p.s.s. $\measuredangle PBI = \measuredangle QBI = \frac{\beta}{2}$

$\measuredangle AIB = 90° + \frac{\gamma}{2}$ per konstruktion

$\measuredangle AIB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\measuredangle C}{2}$

$\Rightarrow \measuredangle C = \gamma$

Utredning: Linjen, parallell till AB, och cirkelbågen kan ha 0, 1 eller 2 gemensamma pkter (beroende på storleksförhållandet mellan c, r och γ)

Det är absolut nödvändigt att $r < \frac{c}{2}$ (eftersom $\gamma > 0$).

Tangenterna kommer alltid att skära varandra, ty $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} < 90°$

$\Rightarrow \alpha + \beta < 180°$

Samma konstruktion kan göras på andra sidan $AB \Rightarrow$ 0, 2 eller 4 kongruenta lösningar (givet AB)

---

4. (b) Rätt svar: (a). (c): fel dimension
(d): ej symmetrisk m.a.p. a, b

(4b) (b) stämmer ej t.ex. för likbent rätvinklig triangel, $\angle C = 90°$. (4)

(5.) (i) Att titta på det "extrema" (minsta) elementet

(ii) Nej; antingen finns ett (strängt) minsta tal bland x, y, z, eller också är två av talen lika, vilket har avhandlats. P.g.a. symmetrin kan vi anta att x är det minsta.

(iii) Ja: symmetrin är "cyklisk", man kan byta x, y, z mot y, z, x, men inte mot y, x, z.

(iv) Färre (d.v.s. 2) ekvationer gör den lättare; man kan välja andra högerled – den enda egenskapen hos f som används är att den är strängt växande

---

(6.) Endast (3) fullständigt; i övriga ska man visa att punkten P finns.

(7.) Man kan ersätta "korda" med cirkelskiva som sfären skär av ett plan; en diameter $\perp$ cirkelskivan går genom dess medelpunkt. Man kan låta kordan vara varsom sträcka och ersätta diametern med cirkelskiva genom sfärens medelpunkt $\perp$ sträckan; den kommer att halvera sträckan.