MVE365
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Ämnesdidaktisk problemlösning, MPLOL
Datum: 2012-03-07, 14:00-18:00
Telefonvakt: Éva Fülöp, tel. 070-945 00 56, besöker salen ca 15:00 och ca 17:00
Hjälpmedel: Inga.
==

Del 1: Geometri

1. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel med medelpunkt O och radie R. Givet att triangelns area är större än R^2, visa att O är en inre punkt för triangeln. (6p)

2. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C. Höjden mot hypotenusan delar bisektrisen till vinkeln vid A i två lika delar. Bestäm triangelns vinklar vid A och B. (6p)

3. Konstruera en triangel givet en sida, den motstående vinkeln till den givna sidan och den inskrivna cirkelns radie. (6p)

4.(a) Formulera och bevisa bisektrissatsen. (6p)

(b) En av formlerna nedan ger längden av bisektrisen till vinkeln C i en triangel, uttryckt i triangelns sidlängder. Vilken? Du får poäng för varje formel du eliminerar. Motivera! (max 6p)

(a) $l_c^2 = ab\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$; **(b)** $l_c^2 = c^2\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$;

(c) $l_c^2 = abc\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$; **(d)** $l_c^2 = a^2\,\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$.

Trigonometri, vektorer, koordinatgeometri och komplexa tal får ej användas.

Del 2: Strategier och metoder

5. Läs noga igenom uppgiften och dess lösning och svara på frågorna som ställs längre ner. Uppgiften ger max 8p.

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x = 1 + \ln y, \\ y = 1 + \ln z, \\ z = 1 + \ln x. \end{cases}$$

Lösning: Logaritmens definitionsmängd kräver att vi endast betraktar positiva x, y, z.

Låt $f(t) = 1 + \ln t,\ t > 0$. Om $x = y$, så följer att $x = f(x) = z$, d.v.s. $x = y = z$.

Antag att $x < y$ och $x < z$. Då följer $z = f(x) < f(y) = x$, vilket är en motsägelse. Det betyder att $x = y$ och vi får av symmetriskäl $x = y = z$. Vad man behöver lösa är alltså ekvationen $x = f(x) = 1 + \ln x$. Funktionen $F(x) = x - 1 - \ln x$ har stationär punkt i $x_0 = 1$, är strängt växande före den punkten, strängt avtagande efter och $F(1) = 0$, varav följer att den enda lösnngen är $x = y = z = 1$.

Frågor: (1) Vad är idén/strategin bakom lösningen?
(2) Är antagandet "$x < y$ och $x < z$" en inskränkning?
(3) Skulle antagandet $x < y < z$ ha varit en inskränkning?
(4) Hur kan man variera uppgiften - göra den lättare, eller göra den mindre krävande vad beträffar den teori som används?

6. Vilket / vilka av bevisen nedan behöver kompletteras, och hur? Uppgiften ger max 4p.

Problem. Givet är en spetsig triangel. På två av dess sidor ritas cirklar med dessa sidor som diametrar. Visa att de två cirklarnas (andra) skärningspunkt ligger på triangelns tredje sida.

Bevis 1. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara de två cirklarnas (andra) skärningspunkt. Av randvinkelsatsen följer att $\angle APC = \angle BPC = 90°$, vilket ger att $\angle APB = 180°$, d.v.s. P ligger på sidan AB.

Bevis 2. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara punkten i vilken en av cirklarna, säg den med diameter CA, skär sidan AB. Enligt randvinkelsatsen är då $\angle APC$ rät. Det följer att $\angle BPC$ också är rät, vilket enligt omvändningen till randvinkelsatsen betyder att P måste ligga på den andra cirkeln också.

Bevis 3. Antag att cirklarnas diametrar är sidorna BC och CA. Låt P vara fotpunkten till höjden från C (d.v.s. $P \in AB$). Då är vinklarna $\angle APC$ och $\angle BPC$ räta, vilket enligt omvändningen till randvinkelsatsen innebär att P måste ligga på båda cirklarna.

Fråga: Vad händer om triangeln inte är spetsig?

7. *ANALOGI:* Formulera (minst) ett sant påstående i rymdgeometri, analogt till påståendet nedan. Uppgiften ger max 4p.

En diameter i en cirkel, vinkelrät mot en korda i samma cirkel, skär denna korda mitt itu.

8. Vilka är de fyra momenten i Polyas problemlösningsschema? (max 4p)

/JM