

MVE365

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Ämnesdidaktisk problemlösning, MPLOL

Datum: 2012-08-25, 14:00-18:00

Telefonvakt: Jana Madjarova, tel. 073-785 56 97, besöker salen ca 15:00 och ca 16:30

Hjälpmedel: Inga.

DEL 1: GEOMETRI

1. Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C . Punkterna O_1 och O_2 är centra (diagonalernas skärningspunkter) i kvadraterna, konstruerade på triangelns kateter utanför $\triangle ABC$. Punkten M är mittpunkten på AB . Visa att punkten C ligger på sträckan O_1O_2 , samt att $\triangle O_1MO_2$ är rätvinklig. (6p)

2. Konstruera en parallelogram $ABCD$, givet att sidorna AB och CD ($AB \parallel CD$) har given längd a , att $BC = DA = BD$, samt att $AC = 2BD$. (6p)

3. Punkten I är inskrivna cirkelns medelpunkt i triangeln ABC . Om $AI = \sqrt{2}$, $BI = 2$ och $AB = \sqrt{10}$ (längdenheter), bestäm triangeln ABC 's area. (6p)

- 4.(a) Bevisa Herons formel för arean av en triangel. (6p; 2p för enbart rätt formel)
- (b) Förklara (utan bevis) varför uttrycket under rottecknet i Herons formel är positivt för alla trianglar. (2p)
- (c) Skriv upp alla andra formler du kan som ger arean av en triangel. (max 4p)

Trigonometri, vektorer, koordinatgeometri och komplexa tal får ej användas.

DEL 2: STRATEGIER OCH METODER

5. Läs noga igenom uppgiften och dess lösning och svara på frågorna som ställs längre ner. Uppgiften ger max 6p.

For a, b positive integers, show that there exist positive integers c, d such that $a^2 + b^2 = c^2 - d^2$ if and only if ab is an even number.

Solution: Let $a, b \in \mathbb{N}$ be such that there exist $c, d \in \mathbb{N}$ such that $a^2 + b^2 = c^2 - d^2$ (observe that $0 \notin \mathbb{N}$ in what follows). Assume that a, b are both odd, i.e. $a = 2m - 1$, $b = 2n - 1$ for some $m, n \in \mathbb{N}$. We then have

$$a^2 + b^2 = 4m^2 - 4m + 1 + 4n^2 - 4n + 1 = 4(m^2 + n^2 - m - n) + 2.$$

Thus the number $a^2 + b^2$ is even but not divisible by four. This is impossible, since $c^2 - d^2 = (c+d)(c-d)$, and the numbers $c+d$ and $c-d$ are odd/even simultaneously.

Let now a, b be positive integers with an even product. Consider the case when one of them is even and the other one odd. WLOG $a = 2m$, $b = 2n - 1$. We then have

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4n^2 - 4n + 1 = 2N + 1 = (N + 1)^2 - N^2,$$

for $N = 2m^2 + 2n^2 - 2n$.

Frågor: (1) Vad fattas för att beviset ska vara fullständigt (du behöver inte slutföra det, beskriv endast momentet som saknas)?

(2) Vad är idén/strategin bakom lösningen?

(3) Kan du komma på sätt att variera uppgiften?

6. Ur *Matematik- och fysikprovet 2008*: Markera rätt svar på frågorna nedan.

15. För alla reella x och alla heltal $n > 2$ gäller att

(a) $\sin^n x + \cos^n x = 1$;

(b) $\sin^n x + \cos^n x > 1$;

(c) $\sin^n x + \cos^n x < 1$;

(d) inget av (a)-(c) gäller för alla reella x och alla $n > 2$.

16. Om a, b är kateterna och c är hypotenusan i en rätvinklig triangel, och om n är ett heltal större än 2, så

(a) $a^n + b^n = c^n$;

(b) $a^n + b^n > c^n$;

(c) $a^n + b^n < c^n$;

(d) inget av (a)-(c) gäller generellt.

Vad är kopplingen mellan frågorna? Är det samma fråga "in disguise"? Kommentera dina svar. (max 4p)

7. DUALITET: En kubs duala polyeder är en s.k. regelbunden oktaeder (en regelbunden kropp med sex hörn, tolv kanter och åtta platta sidor). Den duala oktaederns hörn ligger i kubens sidors centra. Givet att kuben har kantlängd a , bestäm den duala oktaederns kantlängd.

Hur kan vi definiera den duala polyedern till oktaedern ovan, och vad är det för en kropp?

Uppgiften ger max 4p.

8. Välj två problemlösningstrategier du känner till. Exemplifiera med exempel ur geometrin (det kan vara exempel som har diskuterats under kursens gång), eller med exempel ur den aktuella tentamensskrivningen. (max 6p)

/JM