MVE365
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Problemlösning och lärande, MPLOL
Datum: 2014-08-26, 14:00-18:00
Telefonvakt: Jana Madjarova, tel. 073-785 56 97, besöker salen ca 15:00 och 17:00.
Hjälpmedel: Inga.
===

Del 1: Geometri

1. Fyrhörningen $ABCD$ är en rektangel. Punkten P ligger på diagonalen BD, och punkten Q på linjen CP är sådan att P är mittpunkt på CQ. Punkten Q:s ortogonalprojektioner på linjerna AB och AD är E och F, respektive. Visa att $QA \| BD$, och $EF \| AC$. (6p)

2. Konstruera en triangel givet en sida och två höjder i denna. (6p)

3. Sträckorna AA_1, BB_1, CC_1 är höjder i den spetsiga triangeln ABC. Om A_2 är spegelbilden av A_1 i höjden CC_1, visa att fyrhörningen $CA_2B_1A_1$ är inskriven, samt att A_2 ligger på linjen B_1C_1. (6p)

4.(a) Visa att de tre medianerna i en triangel skär varandra i en punkt. (6p; fullständig karakterisering av punkten utan bevis ger 2p)

(b) Ange andra linjer / sträckor som förknippas med en triangel och som skär varandra i en punkt. Vad har skärningspunktens för egenskaper? (max 6p)

Trigonometri, vektorer, koordinatgeometri och komplexa tal får ej användas.

Del 2: Strategier och metoder

5. Läs noga igenom uppgiften och dess lösning och svara på frågorna som ställs längre ner. Uppgiften ger max 5p.

Ett taxibolag i landet Taxia tillämpar två olika prismodeller beroende på den fart man åker med. Resan kostar 30 cent per kilometer då taxibilen kör med en fart som är större än v_0 km/h, och 10 cent per minut under perioder då farten är lägre än v_0 km/h. Hur ska man välja v_0 så att priset vid resa med konstant fart v_0 blir lika stort med båda sätten att räkna?

Lösning: Om man färdas s km med farten v_0 km/h, så kommer resan enligt den första modellen att kosta $30s$ cent. Resan tar då $\frac{s}{v_0}$ h= $\frac{60s}{v_0}$ min, så att den enligt den andra modellen kommer att kosta $\frac{600s}{v_0}$ cent. För att priset ska bli lika stort oavsett vilken modell man väljer måste v_0 uppfylla

$$30s = \frac{600s}{v_0},$$

d.v.s. $v_0 = 20$ km/h.

Frågor: (1) Ett problem man ofta brottas med att introducera nya begrepp så att eleverna känner deras relevans. Det kan då vara lämpligt att börja med exempel, man skulle kunna säga att man använder strategin "titta på specialfall". Uppgiften ovan är lämplig för att introducera ett viktigt begrepp, vilket?

(2) Är modellen rimlig? Tror du att den skulle kunna användas i praktiken?

(3) Uppgiften är också lämplig för att poängtera vikten av dimensionsanalys. Hur kan dimensionsanalys användas vid problemlösning?

6. Ur *Matematik- och fysikprovet 2014*: Markera rätt svar nedan.

20. En fyrhörning kallas *inskriven* om det finns en cirkel som går genom dess fyra hörn. Om fyrhörningen $ABCD$ (med sidor AB, BC, CD, DA och diagonaler AC, BD) är inskriven, så gäller att

(a) $|AB| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| - |CD| \cdot |DA|$;
(b) $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| - |BC| \cdot |DA|$;
(c) $|AB| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD| + |CD| \cdot |DA|$;
(d) $|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA|$.

Ange det rätta svaret och förklara hur du tänker när du löser uppgiften. Påståendet kallas *Ptolemaios sats*. För icke-inskrivna fyrhörningar gäller istället en olikhet (samma för alla fyrhörningar). Avgör hur den ser ut, och förklara återigen hur du tänker. (max 5p)

7. *ANALOGI:* Både tetraedern och konen kan sägas vara analoga till triangeln i det tredimensionella rummet. Förklara analogin i båda fallen. (max 2p)

Jämför formlerna för volym av kon och tetraeder och för area av en triangel. Kan du se analogin i formlerna? Gör ett försök att definiera fyrdimensionell kon. Vad tror du den kommer att ha för (fyrdimensionell) volym? (max 3p)

8. Ge ett exempel ur kursen på hur strategin *tänka baklänges* används. (max 3p) I vilka typer av uppgifter och bevis brukar den vara naturlig? (max 2p)

/JM