

## MVE365

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Problemlösning och lärande, MPLOL

Datum: 2014-03-11, 8:30-12:30

Telefonvakt: Éva Fülöp, tel. 070-945 00 56, besöker salen ca 9:30 och ca 11:30

Hjälpmedel: Inga.

=====

### DEL 1: GEOMETRI

1. Mittpunktsnormalen till bisektrisen för vinkeln vid hörnet  $A$  i triangeln  $ABC$  skär sidan  $AC$  i dess mittpunkt. Visa att  $\triangle ABC$  är likbent. (6p)

2. Konstruera en triangel givet två av dess sidor samt radien till den omskrivna cirkeln. (6p)

3.(a) Givet triangeln  $ABC$  med spetsig vinkel vid  $A$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ , visa att  $b^2 + c^2 > a^2$ . (4p)

(b) Givet är en konvex fyrhörning. Visa att fyrhörningens diagonaler bildar rät vinkel om och endast om summan av kvadraterna på ett par motstående sidor är lika med summan av kvadraterna på det andra paret motstående sidor. (Du får använda resultatet i (a) även om du inte har bevisat det.) (6p)

4.(a) Formulera medelpunktsvinkelsatsen och randvinkelsatsen. (2p)

(b) Formulera och bevisa korda-tangentsatsen. (6p)

Trigonometri, vektorer, koordinatgeometri och komplexa tal får ej användas.

### DEL 2: STRATEGIER OCH METODER

5. Läs noga igenom uppgiften och dess lösning och svara på frågorna som ställs längre ner. Uppgiften ger max 3p.

I en grupp elever på skolresa är 52% av ungdomarna flickor. Vid beräkningen av procentsatsen har man använt avrundningsreglerna ( $n$  betecknar ett icke-negativt heltal, medan  $0 \leq d < 1$ ):

$$\begin{aligned}n\% + d\% &\approx n\% \text{ för } 0 \leq d < 0,5; \\n\% + d\% &\approx (n+1)\% \text{ för } 0,5 < d < 1; \\n\% + 0,5\% &\approx n\% \text{ för } n \text{ jämnt}; \\n\% + 0,5\% &\approx (n+1)\% \text{ för } n \text{ udda.}\end{aligned}$$

Vilket är det minsta möjliga antalet elever i gruppen?

**Lösning:** Låt  $x$  vara antalet flickor och  $y$  vara totala antalet elever. Det givna

villkoret tillsammans med avrundningsreglerna ger

$$51,5 \leq 100 \cdot \frac{x}{y} \leq 52,5,$$

eller  $103y \leq 200x \leq 105y$ .

Antag att  $y$  är ett jämnt tal,  $y = 2k$ . Vi har då att  $x \geq k + 1$ . Tillsammans med den högra olikheten ovan ger det  $200k + 200 \leq 200x \leq 210k$ , så att  $k \geq 20$  och  $y \geq 40$ . Det betyder att  $y$  inte kan vara mindre än 40. Om vi sätter in  $x = 21$  och tillämpar avrundningsreglerna, får vi att  $\frac{x}{y} = 0,525 \approx 52\%$ . Det minsta jämna tal som fungerar är alltså 40.

Antag att  $y$  är ett udda tal,  $y = 2k + 1$ . Då måste  $x \geq k + 1$  gälla. Vi resonerar som ovan och får  $200k + 200 \leq 200x \leq 210k + 105$ , vilket ger  $95 \leq 10k$ . Det betyder att  $k \geq 10$ , och  $y \geq 21$ . Det minsta udda talet som skulle kunna fungera är alltså 21. Nu sätter vi in  $x = 11$  och ser som ovan att  $y = 21$  är ett möjligt antal.

Det minsta antalet elever är alltså 21.

*Frågor:* (1) Vad är det lösningen grundar sig på? (2) Kan du variera uppgiften? (3) Blir du förvånad över något?

**6.** Ur *Matematik- och fysikprovet 2013*: Markera rätt svar nedan.

OBS! Med *vinkel* menas i de två uppgifterna nedan geometrisk vinkel, det vill säga vinkel större än 0 och mindre än  $180^\circ$ .

17. Punkterna  $A, B, C$  ligger på en cirkel med medelpunkt  $O$ . Om vinkeln  $ABC$  är lika med  $60^\circ$ , så är vinkeln  $AOC$  lika med

- (a)  $30^\circ$ ;      (b)  $120^\circ$ ;      (c) annat tal;      (d) kan ej avgöras.

18. Punkterna  $A, B, C$  ligger på en cirkel med medelpunkt  $O$ . Om vinkeln  $AOC$  är lika med  $60^\circ$ , så är vinkeln  $ABC$  lika med

- (a)  $30^\circ$ ;      (b)  $120^\circ$ ;      (c) annat tal;      (d) kan ej avgöras.

Vilka svar är rätt? Vilket tror du var det vanligaste felet? Här handlar det om problem i bemärkelsen "ett vanligt problem man ser som lärare". Kan du formulera problemet? (max 5p)

**7. ANALOGI:** Försök variera uppgift 3, till exempel genom att hitta analogier. Försök avgöra om de analoga påståendena är sanna. Ansats till bevis/motbevis kan belönas med poäng. Uppgiften kan ge max 8p.

**8.** Välj två problemlösningstrategier som har diskuterats i kursen eller som du har läst om, och som du har upplevt kan kombineras. Ge ett eller två exempel, gärna från kursen. (max 4p)

/JM