MVE365
Matematik Chalmers
Problem från tentor i Problemlösning och lärande, MPLOL
Hjälpmedel: Inga.

==

Del 1: Geometri

1. Fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets, $AB \| CD$. Om $AB = a, CD = b$, bestäm längden av sträckan som diagonalerna skär av linjen genom mittpunkterna på sidorna BC och DA. (6p)

2. Konstruera en triangel givet en sida och medianerna mot triangelns två andra sidor. (6p)

3. Givet är en triangel ABC. Tangenterna till dess omskrivna cirkel i punkterna A och B skär varandra i punkten T. Linjen genom T som är parallell med AC skär sidan BC i D. Visa att $AD = CD$. (6p)

4. I parallelltrapetset $ABCD, AB \| CD, AB \geq CD$, gäller att $\angle BAD = \angle DBC$. Visa att $BD \leq AB$. Kan likhet förekomma och i så fall när? (6p)

5. Åtta kongruenta små cirklar med radie r ligger innanför en cirkel med radie R så att var och en av de små cirklarna tangerar den stora cirkeln och två andra små cirklar. De små cirkelskivorna överlappar inte. Visa att

$$r = R\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\,. \qquad \text{(6p)}$$

6. Konstruera en triangel ABC, givet att höjden mot sidan AB är h_c, medianen från hörnet C är m_c och sidan CA är b, där h_c, m_c, b är givna sträckor.

Del 2: Strategier och metoder

7. *DUALITET:* En regelbunden polyeders (kropps) duala är en annan regelbunden polyeder med hörn som ligger i den ursprungliga polyederns sidors centra. Till exempel är en kubs duala polyeder en s.k. regelbunden oktaeder, en regelbunden kropp med sex hörn, tolv kanter och åtta platta sidor, med hörn i kubens sidors centra.

Givet att en regelbunden tetraeder har kantlängd a, bestäm hur den duala polyedern ser ut och beräkna dess kantlängd. (6p)

Lösning 4: Förläng linjerna AD och BC till deras skärningspunkt P (om de skär varandra). Trianglarna ABP och BDP är likformiga (likställiga), och D ligger mellan A och P, vilket ger påståendet. Likhet fås då $BC \| AD$, d.v.s. då trapetset är en parallellogram.

Lösning 5: Om vi binder ihop två intilliggande småcirklars medelpunkter och den stora cirkelns medelpunkt får vi en likbent triangel med sidor $2r, R-r, R-r$, och toppvinkel $45°$. Dra höjden mot benet i den likbenta triangeln. Den ena rätvinkliga triangeln som då bildas är likbent, och av den andra får vi

$$\left(\frac{R-r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left((R-r)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 = 4r^2.$$

Vi kan dividera med R^2 och sätta $k = \dfrac{r}{R}$, vilket ger andragradsekvationen för k

$$(2+\sqrt{2})k^2 + 2(2-\sqrt{2})k - (2-\sqrt{2}) = 0,$$

och

$$r = R\,\frac{(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{2-\sqrt{2}})}{2+\sqrt{2}} = R\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Lösning 6. *Analys.* Antag att triangeln är konstruerad. Om sidan AB ligger på en linje l, så befinner sig hörnet C dels på avstånd h_c från l, dels på avstånd m_c från sidan AB:s mittpunkt M, som är en punkt på l.

Konstruktion. Drag en linje l. Drag en linje l', parallell med l och på avstånd h_c från l. Välj en punkt M på l. Rita en cirkel med medelpunkt i M och radie m_c. Beteckna med C en av skärningspunkterna (eventuellt tangeringspunkten) med l'. Rita en cirkel med medelpunkt C och radie b; den skär l i A. Punkten B ligger på andra sidan M, och $AM = BM$.

Bevis. Följer ur konstruktionen.

Utredning. För att det ska finnas lösning krävs att $m_c \geq h_c$, och $b \geq h_c$. (För $m_c = h_c$ får vi en likbent triangel, för $b = h_c$ får vi en rätvinklig.) För $b > h_c$ och $m_c > h_c$ finns två icke-kongruenta lösningar, eftersom det blir två möjligheter för hörnet A och de två ger väsentligen olika lösningar.