Inledande matematisk analys F1/TM1, HT 2011

FELAKTIGA LÖSNINGAR

1. Följande "lösningar" demonstrerar några typiska elevfel. Finn felen och lös därefter uppgifterna rätt! Lägg märke till att man ibland kan få rätt svar genom felaktiga resonemang. Tänk på det innan du "prickar av" uppgifter! Tänk också på att uppgiften kanske inte alltid är korrekt formulerad.

(1) Lös ekvationen

$$\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}(a-x)(b-x)&=(1-ax)(1-bx)\\ ab-ax-bx+x^2&=1-bx-ax+abx^2\\ x^2&=1+abx^2-ab\\ x^2-1&=ab\,(x^2-1)\\ 1&=ab\quad ???\end{aligned}$$

(2) Lös ekvationen

$$(x+1)^2-(x+2)(x+3)=(x+4)(x+5)-(x+6)^2.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}x^2+2x+1-x^2-5x-6&=x^2+9x+20-x^2-12x-36\\ -3x-5&=-3x-16\\ 5&=16\quad ???\end{aligned}$$

(3) Lös ekvationen

$$\frac{6}{x-3}-\frac{9}{x-2}=\frac{1}{x-4}-\frac{4}{x-1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}\frac{6(x-2)-9(x-3)}{(x-2)(x-3)}&=\frac{(x-1)-4(x-4)}{(x-4)(x-1)}\\ \frac{6x-12-9x+27}{x^2-5x+6}&=\frac{x-1-4x+16}{x^2-5x+4}\\ \frac{15-3x}{x^2-5x+6}&=\frac{15-3x}{x^2-5x+4}\\ 6&=4\quad ???\end{aligned}$$

(4) Lös ekvationen

$$\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{6}+1} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x+1}-2\sqrt{6}+1}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{6x}+\sqrt{x}+4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}+4 &= \\
=\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{6x}+\sqrt{x}-4\sqrt{x+1}-8\sqrt{6}-4 & \\
8\sqrt{x+1}+8 &= 4\sqrt{6x} \\
2\sqrt{x+1} &= \sqrt{6x}-2 \\
4x+4 &= 6x+4-4\sqrt{6x} \\
2\sqrt{6x} &= x \\
24x &= x^2 \\
x &= 24.
\end{aligned}$$

(5) Lös ekvationen

$$\sqrt{x-4}-\frac{3}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-1}=0.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
x-4-3-\sqrt{(x-1)(x-4)} &= 0 \\
x-7 &= \sqrt{(x-1)(x-4)} \\
x^2-14x+49 &= x^2-5x+4 \\
9x &= 45 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

.

(6) Bestäm x ur ekvationen

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^7.$$

Lösning: Vi får $3^{x+7}=4^{x+7}$ varav $3=4$. ???

(7) Bestäm x ur ekvationen

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\ln x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\ln x}=\frac{13}{6}.$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
\ln x \ln \frac{2}{3} + \ln x \ln \frac{3}{2} &= \ln \frac{13}{6} \\
\ln x \left(\ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{2} \right) &= \ln \frac{13}{6} \\
\ln x \ln \frac{13}{6} &= \ln \frac{13}{6} \\
\ln x &= 1 \\
x &= e.
\end{aligned}$$

.

(8) För vilka reella a och b gäller olikheten

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad ?$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &> 2ab \\
a^2 - ab &> ab - b^2 \\
a(a-b) &> b(a-b) \\
a &> b.
\end{aligned}$$

.

(9) Bestäm arean av en rätvinklig triangel med hypotenusa med längden 8 l.e. och höjd mot hypotenusan med längden 5 l.e.

Lösning: Arean är lika med $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ a.e.

(10) En triangel har sidlängderna a, b, c. Uttryck $\sin \alpha$ i termer av a, b, c.

Lösning: Sinusteoremet ger

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Därav följer

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

och

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \text{varav} \quad \sin\alpha = \frac{ac}{b}.$$

(11) Givet enhetscirkeln, finns det en diameter som skär den i en enda punkt?

Lösning: Ja, ty:

Cirkeln kan skrivas som

$$x = \cos\phi, \quad y = \sin\phi, \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Sätt nu $t = \tan\frac{\phi}{2}$, då

$$\begin{aligned} x = \cos\phi &= (\cos\frac{\phi}{2})^2 - (\sin\frac{\phi}{2})^2 = \\ &= (\cos\frac{\phi}{2})^2 \left(1 - (\tan\frac{\phi}{2})^2\right) \\ &= \frac{1 - (\tan\frac{\phi}{2})^2}{1 + (\tan\frac{\phi}{2})^2} \\ &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Analogt får vi

$$y = \sin\phi = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Betrakta nu den diameter som ligger på x-axeln; den fås för $y = 0$, alltså för $t = 0$. Men $t = 0$ ger endast $x = 1$, alltså har vi hittat en diameter som skär cirkeln i en enda punkt.

(12) Givet funktionen $f(x) = \ln(2x - 5)$, beräkna $f'(1)$.

Lösning:

$$f'(x) = \frac{1}{2x - 5} \cdot 2 \quad \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2 - 5} = -\frac{2}{3}.$$

(13) Beräkna integralen

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Lösning:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{1/2}^{1} dx - \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} - [\ln x]_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - 0 + \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

(14) Beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3}.$$

Lösning:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^{1} x^{-3} dx = -\frac{1}{2}\left[x^{-2}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Jana Madjarova