MVE365
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Problemlösning och lärande, MPLOL
Datum: 2017-03-14, 8:30-12:30
Telefonvakt: Lyudmyla Turowska, ankn. 5341, besöker salen 10:45, svarar på frågor i telefon resten av tiden
Hjälpmedel: Inga (det är dock tillåtet att använda passare och linjal).
==

Del 1: Geometri

1. Vinkeln vid hörnet C i den spetsvinkliga triangeln ABC är $60°$. Punkten M är mittpunkt på sidan AB, och sträckorna AP och BQ är höjder i $\triangle ABC$. Visa att triangeln PQM är liksidig. (6p)

2. Konstruera en triangel, givet de tre sidornas mittpunkter. (6p)

3. Cirklarna k_1 och k_2 skär varandra i punkterna A och B, och k_2:s medelpunkt ligger på k_1. Cirkeln k_3 har medelpunkt i A och radie AB, och den skär k_2 (en andra gång) i C. Visa att linjen AC är tangent till cirkeln k_1. (6p)

4.(a) Formulera och bevisa medelpunktsatsen och randvinkelsatsen. (6p)

(b) Visa att medianen mot hypotenusan i en rätvinklig triangel är hälften så lång som själva hypotenusan. (6p)

Trigonometri, vektorer, koordinatgeometri och komplexa tal får ej användas.

Del 2: Strategier och metoder

5. Läs noga igenom uppgiften och dess lösning och svara på frågorna som ställs längre ner. Uppgiften ger max 5p.

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{y+2} + \dfrac{3}{z+1} = 3, \end{cases}$$

där $x, y \geq -1,\ z > -1$.

Lösning: Sätt $u = x + 3,\ v = y + 2,\ w = z + 1$. Systemet får utseendet

$$\begin{cases} u \quad + \ 2v \quad + \ 3w \ = \ 12, \\[2ex] \dfrac{1}{u} \quad + \dfrac{2}{v} \quad + \dfrac{3}{w} \ = \ 3, \end{cases}$$

där $u, v, w > 0$. Vi utnyttjar olikheten $t + \dfrac{1}{t} \geq 2$ för $t > 0$, med likhet omm $t = 1$, och får

$$36 = (u + 2v + 3w)\left(\frac{1}{u} + \frac{2}{v} + \frac{3}{w}\right) \geq 14 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 36,$$

med likhet omm $u = v = w = 2$, det vill säga $x = -1,\ y = 0,\ z = 1$. Insättning visar att $x = -1,\ y = 0,\ z = 1$ är en lösning.

Frågor: (1) Är det ett svar man förväntar sig? Jämför med ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och tre obekanta. *(2)* Hur ändras lösningen om man byter ut 12 mot 10 i den första ekvationens högerled? *(3)* Uppgiften är ett typiskt exempel på hur problemkonstruktionen kan hänga samman med lösningsmetoden. Kan du se spår av någon strategi problemet och dess lösning illustrerar?

6. Ur *Matematik- och fysikprovet 2016*: Markera rätt svar nedan.

18. En sats i geometrin lyder: *I en kring en cirkel omskriven fyrhörning är summan av det ena paret motstående sidor lika med summan av det andra paret motstående sidor.* Av satsen följer att

(a) En romb med sidan 4 l.e. är omskriven kring en cirkel.
(b) En rektangel med sidor 3 och 4 l.e. är inte omskriven kring en cirkel.
(c) Varje fyrhörning är omskriven kring en cirkel.
(d) Ingen av slutsatserna (a)-(c) följer av satsen ovan.

Vilket svar är rätt? Vilket tror du var det vanligaste felet? Vad är det för problem det speglar? Kan du föreslå övningar för att förebygga liknande fel? (max 4p)

7. *ANALOGI:* Tänk på hur man givet en cirkel i planet hittar dess medelpunkt. Föreslå ett analogt förfarande för att hitta en sfärs medelpunkt i rummet. Skissa ett bevis för att det fungerar (endast principiellt, utan detaljer). (max 5p)

8. Kommentera följande problemlösningsstrategier och eventuella kopplingar du ser mellan dem: *(i)* lös analogt enklare problem; *(ii)* titta på specialfall; *(iii)* titta på extremfall. Ge gärna exempel. (max 6p)

/JM