Anonym kod	MVE415 Matematisk analys, del 1 170609	Sidnr	Poäng
		1	

1. Till nedanstående uppgifter skall lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ då $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$. (2p)

Lösning:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{1+2x+2h} - \frac{1}{1+2x}}{h} =$$

$$= \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(1+2x+2h)(1+2x)} \to \frac{-2}{(1+2x)^2}, \quad h \to 0$$

Svar: $-2/(1+2x)^2$

(b) Bestäm lokala max/min till funktionen $f(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$. (3p)

Lösning:

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{3-3x^2}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

		-1		1	
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Svar: $x = -1$ lok min $x = 1$ lok max

(c) Lös ekvationen $|x-5| + 7 = 3x$. (3p)

Lösning:

$x \geq 5$: $x - 5 + 7 = 3x \iff 2 = 2x$
$1 = x$ ej lösn ty $1 < 5$

$x < 5$: $5 - x + 7 = 3x \iff 12 = 4x$
$3 = x$ ok ty $3 < 5$

Svar: $x = 3$

Var god vänd!

(d) Ange den primitiva funktion till $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ som uppfyller $F(1) = 2$. (2p)

Lösning:

$$F(x) = 3\ln x - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = 3\ln x + \frac{1}{2x^2} + C$$

$$F(1) = 3\underbrace{\ln 1}_{=0} + \frac{1}{2} + C = 2 \quad C = \frac{3}{2}$$

Svar: $F(x) = 3\ln x + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$

(e) Bestäm inversen till funktionen $y(x) = (2x^{-1} + 1)/(3x^{-1} + 4)$. (3p)

Lösning:

$$y = \frac{\frac{2}{x} + 1}{\frac{3}{x} + 4} = \frac{2+x}{3+4x} \Leftrightarrow (3+4x)y = (2+x)$$

$$3y - 2 = x - 4xy \Leftrightarrow x = \frac{3y-2}{1-4y}$$

Svar: $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{1-4x}$

(f) Bestäm mha linjär approximation ett närmevärde till $f(3)$ om $f(x) = x^2 \sin(x)$. (Använd $\pi \approx 3.14$, $\pi^2 \approx 10$) (3p)

Lösning:

$$f(3) \approx f(\pi) + f'(\pi)(3 - \pi)$$

$$f'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x$$

$$f(\pi) = \pi^2 \underbrace{\sin \pi}_{=0} = 0$$

$$f'(\pi) = 2\pi \sin \pi + \pi^2 \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \approx -10$$

Svar: $f(3) \approx 0 - 10 \cdot (-0.14) = 1.4$

2/ $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}(1+2x) - e^{-x}\cdot 2}{(1+2x)^2} = \dfrac{e^{-x}(-3-2x)}{(1+2x)^2}$

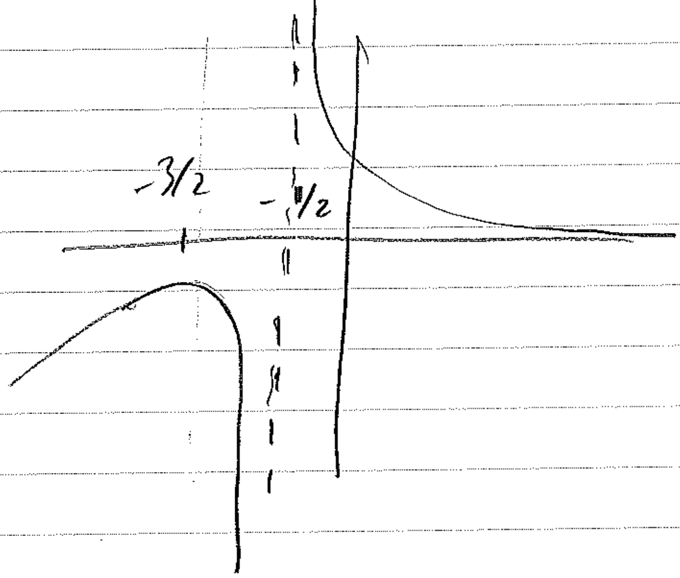
$f'(x) = 0 \iff x = -\dfrac{3}{2}$

$$\begin{array}{cccccc} & -3/2 & & -1/2 & & x \\ + & & - & & - & \\ \nearrow & & \searrow & & \searrow & \end{array}$$

$f(-\frac{3}{2}) = \dfrac{e^{3/2}}{-2}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} = +\infty$

$\dfrac{f(x)}{x} \to \begin{cases} \infty, & x \to -\infty \\ 0, & x \to +\infty \end{cases}$ $\quad f(x) - 0 \cdot x \to 0, \; x \to \infty$



3/ $(x+\frac{1}{2})^2 + 2(y-\frac{1}{2})^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

$$\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\underbrace{(\frac{3}{2})^2}_{\text{Längst}}} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\underbrace{(\frac{3}{2\sqrt{2}})^2}_{\text{Kortast}}} = 1$$

$2x + 1 + 4yy' - 2y' = 0$

$y' = -\dfrac{2x+1}{4y-2}$

$= -\dfrac{1}{4\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}\right) - 2}$

$= \pm 1$

4/ $\lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{0}{0} = H$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2x}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$

5/ $y' = (2c_1x + c_2)e^{-2x} + (-2)(c_1x^2 + c_2x)e^{-2x}$

$y'' = \left(2c_1 - 4(2c_1x + c_2) + 4(c_1x^2 + c_2x)\right)e^{-2x}$

$y'' - 4y = (\underbrace{2c_1 - 4c_2}_{0} \underbrace{-8c_1}_{3} x)e^{-2x}$

$c_1 = -\frac{3}{8} \quad c_2 = -\frac{3}{16}$

6/ $x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9$

$0 = 3x^2 - 8x + 5 = 3(x-1)(x-\frac{5}{3})$

test $x = 1: \sqrt{1} + 3 = 2$ nej

$x = \frac{5}{3}: \sqrt{\frac{1}{3}} + 3 = \frac{10}{3}$ ok

7/ $f'(x) = 3e^{-4x} - e^{-2x}$ (alt $2x-3>0$)

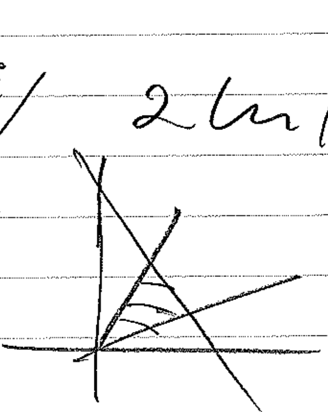
$f(x) = 3\frac{e^{-4x}}{-4} - \frac{e^{-2x}}{-2} + C \qquad -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + C = 1$

$f'(x) = e^{-4x}(3 - e^{2x}) = 0 \qquad C = \frac{5}{4}$

$x = \ln\sqrt{3}$ $\quad + \mid -$ lok max

8/ i/ $\frac{1}{2}(x^2+1) - \ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C$

ii/ $2\ln|\sin 2x| + C$

9/  $k = \sqrt{2}$

10/ $\frac{f(2a)-f(a)}{a}$ $\quad a = \sqrt{\ln\sqrt[3]{2}}$