Lösningar

Kurskod: MVE425a

Lindholmen 15 augusti 2017

Tid: 8.30 – 12.30

Telefonvakt: Torbjörn Lundh, 0709847070

Rondvakt: Vilhelm Adolfsson , 031 772 5307

Inga hjälpmedel

Betygsgränser: $20 - 31 \Rightarrow 3$; $32 - 41 \Rightarrow 4$; $42 - 50 \Rightarrow 5$

Examinator: Torbjörn Lundh

1. (a) Vad är ett naturligt tal? (3p)

   (b) Vad är ett primtal? (3p)

   Lösningsskiss: Se boken sidorna 1 och 9.

2. (a) Primtalsfaktorisera talet 2375 (3p)

   (b) Förenkla följande uttryck så långt det går!

$$4x^2 + \frac{(x-y)^3 - (x+y)^3}{2y} + y^2$$

(3p)

   Lösningsskiss:

   (a) Ett tal som slutar med ett tvåsiffrigt tal som är delbart med fem är delbart med fem, så

$$2375 = 5^3 \cdot 19.$$

   (b) Eftersom

$$(x-y)^3 - (x+y)^3 = -2y(3x^2 + y)$$

   är

$$4x^2 + \frac{(x-y)^3 - (x+y)^3}{2y} + y^2 = x^2.$$

3. (a) Lös följande ekvationssystem

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 2 \\ 5x - 5y &= 5 \end{cases}$$

(4p)

   (b) Skriv upp ett ekvationssystem med oändligt många lösningar och förklara varför det är så. (3p)

   (c) Skriv upp ett ekvationssystem med som saknar lösning. Förklara. (3p)

   Lösningsskiss:

   (a)

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 2 \\ 5x - 5y &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \phantom{{}-5y} &= 1 \\ \phantom{5x-{}} y &= 0 \end{cases}$$

4. Ge lösningsmängden för följande olikhet

$$|2x-4|<1.$$

(4p)

Lösningsskiss:

$$|2x-4|<1 \Leftrightarrow |x-2|<\frac{1}{2}.$$

Det vill säga, olikheten är uppfylld för alla x på ett avstånd till 2 strikt mindre än $\frac{1}{2}$. Med andra ord, lösningsmängden är

$$\{x:\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2})\}.$$

5. Ge alla reella lösningar till följande ekvation

$$z^4+2z^3-2z^2+2z-3=0,$$

(4p)

Lösningsskiss: Antag att jag varit snäll och leta heltalslösningar. Enligt satsen om heltalsrötter på sidan 138 letar vi faktorer i -3 (dvs a_0). Med andra ord är möjliga heltalsrötter $\pm1,\pm3$. Genom att insättning fås att 1 och -3 är rötter och genom polynomdivision med $(z-1)(z+3)$ får vi kvar polynomet z^2+1 och vi ser då direkt att det inte finns några andra reella rötter.

6. (a) Rita kurvan $y=x^2-4x+2$.
   (b) Vilken typ av kägelsnitt är detta? (1p)
   (c) Beskriv i ord och med en skiss hur man geometriskt kan konstruera denna kurva utgående från avstånd från två andra geometriska objekt. (3p)
   (d) Vad kallas dessa speciella geometriska objekt och var ligger de? (3p)

   Lösningsskiss: Genom kvadratkomplettering får vi att kurvan an skrivas som $y+2=1\cdot(x-2)^2$. Dvs, en parabel med vertex i $(2,-2)$ och med k-värde 1. Eftersom $k=\frac{1}{4c}$, är $c=\frac{1}{4}$ och parabelns *brännpunkt* ligger i vertex plus c i y-led, dvs i punkten $(2,-\frac{7}{4})$ och parabelns *styrlinje* är linjen $y=-\frac{9}{4}$. Parabeln definieras då geometriskt som de punkter som ligger på samma avstånd från brännpunkten som till styrlinjen. Till exempel är kvadraten av avståndet från punkten som skär y-axeln, $(0,2)$, till brännpunkten med hjälp av Pytagoras sats

$$2^2+(2+\frac{7}{4})^2=4+(\frac{15}{4})^2=\frac{289}{16}.$$

   Detta är också kvadraten på avståndet till styrlinjen från punkten $(0,2)$, dvs

$$(2+\frac{9}{4})^2=(\frac{17}{4})^2=\frac{289}{16}.$$

7. En stor oljecistern är formad som en sfär med volym 8000 m^3. Som reserv beslutas att en mindre (också sfärformad) oljetank ska beställas med halva radien av den befintliga.

   (a) Hur stor volym kommer denna reservcistern att ha? (2p)
   (b) För att beräkna rostskyddsmålningskostnaderna, vill man också veta hur stor area denna nya mindre cistern kommer att ha dels i jämförelse med den befintliga och dels i absoluta termer exakt i m^2. (1+4 p)

Lösningsskiss: Volymskalan är kuben på längdskalan och areaskalan är kvadraten på längdskalan. Längdskalan är $\frac{1}{2}$ av den nya cisternen så därför blir volymen $8000 \cdot (\frac{1}{2})^3 = 1000 \ \ m^3$. Förhållandet mellan areoerna blir då att den nya cisternens area är en fjärdedel av den befintliga tankens area. Fär att räkna ut denna area i absoluta termer påminner vi oss att volymen av en klot är $\frac{4\pi R^3}{3}$ och dess yta har area $4\pi R^2$. Detta ger oss att radien hos den stora cisternen är

$$R = 10(\frac{6}{\pi})^{\frac{1}{3}}.$$

Eftersom den lilla cisternens radie är hälften av denna, blir arean av den påtänkta cisternen

$$4\pi\left(5(\frac{6}{\pi})^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 100 \cdot 6^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{1}{3}} \ \ m^2.$$

8. Formulera och bevisa **trigonometriska ettan** för spetsiga vinklar. (4p)

9. Formulera och bevisa lösningsformeln (den så kallade pq-formeln) för en *allmän* andragradsekvation. (4p)