Lösningsförslag till tentamen 5 jan 2015
Matematik, del A, för Tekniskt basår

1. Förenkla och skriv följande uttryck på så enkel form som möjligt

   (a) $\dfrac{12^{31} \cdot 21^{18}}{28^{17} \cdot 36^{15} \cdot 3^{19}}$ (4p)

   Lösning:
   $$\frac{12^{31} \cdot 21^{18}}{28^{17} \cdot 36^{15} \cdot 3^{19}} =$$
   $$= \frac{(2^2 \cdot 3)^{31} \cdot (3 \cdot 7)^{18}}{(2^2 \cdot 7)^{17} \cdot (2^2 \cdot 3^2)^{15} \cdot 3^{19}} =$$
   $$= \frac{2^{62} \cdot 3^{31} \cdot 3^{18} \cdot 7^{18}}{2^{34} \cdot 7^{17} \cdot 2^{30} \cdot 3^{30} \cdot 3^{19}} =$$
   $$= 2^{62-34-30} \cdot 3^{31+18-30-19} \cdot 7^{18-17} = 2^{-2} \cdot 7 = \frac{7}{4}$$

   Svar: $7/4$

   (b) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{3}{x^2+x-2}$ (4p)

   Lösning:
   $$\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} =$$
   $$= \frac{1}{x+2} + \frac{3}{(x+2)(x-1)} =$$
   $$= \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} + \frac{3}{(x+2)(x-1)} =$$
   $$= \frac{x+2}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

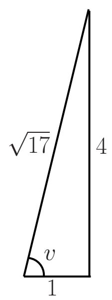
   Svar: $1/(x-1)$

2. (a) Beräkna $\sin v$, då $v = \arctan 4$. (3p)

   Lösning: $\sin^2 v = \dfrac{\tan^2 v}{1+\tan^2 v} = \dfrac{4^2}{1+4^2} = \dfrac{16}{17}$

   Eftersom $0 < v < \dfrac{\pi}{2}$ så följer det att $\sin v = \sqrt{\dfrac{16}{17}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

   Alternativt kan man rita en rätvinklig hjälptriangel där, den till vinkeln v, närliggande kateten har längden 1 och motstående katet har längden 4. Därefter kan man beräkna hypotenusans längd till $\sqrt{17}$ med hjälp av Pythagoras sats, varpå värdet på $\sin v$ kan beräknas per definition av sinus som motstående katet delat med hypotenusan dvs. $4/\sqrt{17}$.

   Svar: $4/\sqrt{17}$

(b) Beräkna omkretsen av en rätvinklig triangel där hypotenusan är 3 cm och en av vinklarna är 30°. (3p)

Lösning: Kateternas längder är;
$3\sin\frac{\pi}{6} = 3\frac{1}{2}$ resp. $3\cos\frac{\pi}{6} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$
så triangelns omkrets är;
$3 + \frac{3}{2} + 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)$

Svar: $\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm

3. Beräkna volymen av ett klot vars skal har arean 6 cm^2 (skriv svaret på så enkel form som möjligt). (4p)

Lösning: Om R är klotets radie så får vi;

$$4\pi R^2 = 6 \;\Rightarrow\; R = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$$

varpå klotet volym kan beräknas till;

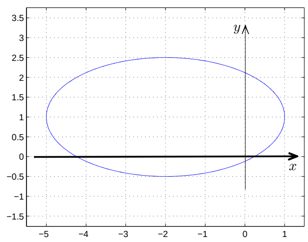
$$\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} = 2\sqrt{\frac{3}{2\pi}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

Svar: $\sqrt{6/\pi}$ cm^3

4. Bestäm medelpunkt och halvaxlar för den ellips som beskrivs av ekvationen $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y - 1 = 0$. Skissa sedan ellipsen. (4p)

Lösning: Kvadratkomplettering ger att;

$$\begin{gathered} x^2 + 4x + 4y^2 - 8y - 1 = 0 \;\Leftrightarrow \\ (x+2)^2 - 4 + 4((y-1)^2 - 1) - 1 = 0 \;\Leftrightarrow \\ (x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 9 \;\Leftrightarrow \\ \frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{(3/2)^2} = 1 \end{gathered}$$



så vi avläser att;

Svar: Ellipsens medelpunkt är $(-2, 1)$ och ellipsen har halvaxlarna $a = 3$ resp. $b = 3/2$.

5. Bestäm koefficienterna a, b och c så att andragradskurvan

$$y = ax^2 + bx + c$$

går genom punkterna $(-1; 6), (1; 0)$ och $(2; 3)$. (5p)

Lösning: Kurvan går genom punkten $(-1, 6)$ om $x = -1$ och $y = 6$ uppfyller ekvationen $y = ax^2 + bx + c$, dvs. om $6 = a - b + c$. Av samma skäl går kurvan genom punkterna $(1, 0)$ och $(2, 3)$ om $0 = a + b + c$ och $3 = 4a + 2b + c$. Så vi söker en lösning till ekvationssystemet;

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & - & b & + & c & = & 6 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 3 \end{array}\right.$$

Ekvationssystemet kan lösas steg för steg med eliminationsmetoden;

$$\begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 6 \\ 2b = -6 \\ 6b - 3c = -21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ b = -3 \\ -3c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

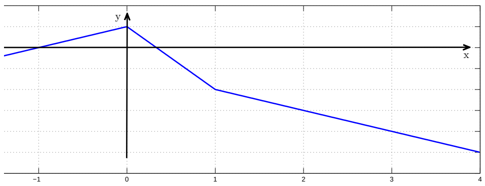
Svar: $a = 2, b = -3, c = 1$

6. (a) Skissa kurvan $y = |x-1| - 2|x|$ (3p)

Lösning: ”Brytpunkterna” för uttrycket $|x-1| - 2|x|$ är $x = 0$ och $x = 1$, så vi studerar uttrycket var för sig i de tre intervallen (I) $x < 0$, (II) $0 \leq x < 1$, (III) $x \geq 1$.

(I) Om $x < 0$ så är $|x-1| - 2|x| = -(x-1) - 2(-x) = x + 1$
(II) Om $0 \leq x < 1$ så är $|x-1| - 2|x| = -(x-1) - 2x = -3x + 1$
(III) Om $x \geq 1$ så är $|x-1| - 2|x| = x - 1 - 2x = -x - 1$

Så kurvan båstår av de tre delarna $\begin{cases} y = x + 1\ , & \text{då } x < 0 \\ y = -3x + 1\ , & \text{då } 0 \leq x < 1 \\ y = -x - 1\ , & \text{då } x \geq 1 \end{cases}$



(b) Hur många lösningar har ekvationen $|x-1| - 2|x| = C$, för olika värden på konstanten C? (2p)

Lösning: Från skissen i deluppgift (a) avläser vi att;

Svar: Ekvationen har $\begin{cases} \text{två lösningar om } C < 1 \\ \text{en lösning om } C = 1 \\ \text{inga lösningar om } C > 1 \end{cases}$

7. Lös dubbelolikheten $-2 \leq \dfrac{x-1}{x+1} < \dfrac{1}{2}$ (6p)

Lösning: Vi studerar de två olikheterna var för sig;

$$-2 \leq \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3x+1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x < -1) \vee (x \geq -\frac{1}{3})$$

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\frac{\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

Sammantaget får vi att de x som uppfyller båda olikheterna är;

Svar: $-\frac{1}{3} \leq x < 3$

8. Bestäm avståndet från punkten $(1,1)$ till linjen $3x+6y=4$ (6p)

Lösning: Vi börjar med att ta fram den punkt på linjen $3x+6y=4$ som ligger närmast $(1,1)$. Detta kan vi göra genom att beräkna skärningspunkten mellan linjen $3x+6y=4$ och dess normalinje genom $(1,1)$. Notera att $3x+6y=4 \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$ så linjens riktningskoefficient är $k=-\frac{1}{2}$. Normallinjens riktningskoefficient är därför $k_N=2$ (ty $k\,k_N=-1$) och enpunktsformeln ger att den sökta normallinjen har ekvationen $y-1=2(x-1) \;\Leftrightarrow\; y=2x-1$. Om vi ersätter y med $2x-1$ i den ursprungliga linjens ekvation får vi;

$$3x+6(2x-1)=4 \;\Leftrightarrow\; 15x=10 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{2}{3}$$

Motsvarande y-värde får vi genom insättning av $x=\frac{2}{3}$ i någon av de två linjernas ekvationer t.ex. $y=2\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}$. Den sökta skärningspunkten är alltså $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$, som alltså är den punkt på linjen $3x+6y=4$ som ligger närmast $(1,1)$. Det sökta avståndet kan vi sedan beräkna med avståndsformeln;

$$\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Alternativt skulle vi istället kunna undersöka när avståndet från en punkt (x,y) på linjen $3x+6y=4$ till punkten $(1,1)$ blir som minst dvs bestämma det minsta värdet på $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, då $3x+6y=4$. Insättning av $y=-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$ i uttrycket $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ ger;

$$\sqrt{(x-1)^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{10}{9}}=$$

$$=\sqrt{\frac{5}{4}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{8}{9}\right)}=\sqrt{\frac{5}{4}\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right)}$$

Här avläser vi att det minsta värdet antas då $x=\frac{2}{3}$ vilket ger avståndet;

$$\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Svar: $\sqrt{5}/3$

9. (a) Visa att om r är en heltalsrot till en tredjegradsekvation $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, med reella heltalskoefficienter a_0,a_1,a_2 och a_3, så är r en faktor i a_0. (4p)

(b) Formulera och bevisa konjugatregeln (för $n=2$). (2p)